



# الرياضيات

## السادس العلمي

2019

المفيد في ثلاثية

# حيدر وليد

07701780364

MATHEMATICS

الأحيائي

الجزء الاول



WWW.IQ-RES.COM



@IQRES

قناتنا على التلي كرام

موقع طلاب العراق



موقع طلاب العراق

الأعداد المركبة

القطوع المخروطية

الفصل  
الاول

الفصل  
الثاني

فصل المخرّب  
سادس - السعدون  
بغداد - المتنبي  
07702729223



2019

المؤحيائي



موقع طلاب العراق

# المفيد في ثلاثية حيذكر ولبيد

07701780364

الجزء الاول



07702729223

عند اقتناء ملزمتك من دار المغرب تأكد من وجود  
(الجلدة المدورة اللاصقة) في وجه الغلاف غير ذلك تعتبر مزورة



WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق



موقع طلاب العراق

” ( ... شارك رابط موقعنا ... )  
مع اصدقائك لتعم الفائدة  
ولا تنسونا من صالح دعائكم  
“

نتائج

كتب

ملازم

أخبار

أسئلة

التعليم العالي

وزارة التربية

تابعونا ..



@iQRES



/ iQRES



/ NTAAj.iQ

كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي



المفيد في ثلاثية  
حيدر وليد  
الرياضيات

2019



الأعداد  
المركبة

الفصل  
الاول



مدخل الى موضوع الاعداد المركبة

نعلم ان الجذور التربيعية للاعداد الموجبة هي :

$$\sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{100} = 10$$

اي هناك قيمة لعدد موجب تحت الجذر التربيعي .

ولكن :

$$\sqrt{-9} = ? \quad \begin{cases} \text{خطأ} 3 \\ \text{خطأ} -3 \end{cases}, \quad \sqrt{-16} = ? \quad \begin{cases} \text{خطأ} 4 \\ \text{خطأ} -4 \end{cases}$$

اذن لا توجد قيمة حقيقية لعدد سالب تحت الجذر التربيعي .  
أو جذر دليله زوجي مثل :  $\sqrt[4]{\quad}$  ,  $\sqrt[6]{\quad}$  ,  $\sqrt[8]{\quad}$  ... الخ .

**لذلك :**

نفرض ان هناك قيمة لعدد سالب تحت الجذر التربيعي هو (i)

$$\sqrt{-1} = i \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

وبتربيع المعادلة الاخيرة

$$i^4 = 1$$

**خلاصة :**

حفظ

$$i^2 = -1$$

$$i^4 = 1$$

$$i^3 = (i^2)(i)$$

$$i^3 = (-1)(i)$$

$$i^3 = -i$$

**استراحة شعرية :**

ما مرّ ذكرك إلا وابتسمت له  
كأنك العيد والباقيون أيام  
أو هيام طيفك إلا طرت اتبعه  
أنت الحقيقة والجلّاس أو هيام



كيف نكتب عدد سالب تحت الجذر التربيعي بدلالة (i):

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}$ $= 4i$	$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$ $= 5i$	$\sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}$ $= 6i$
$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{4 \times 3} (i) = 2\sqrt{3}i$	$\sqrt{-18} = \sqrt{18} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{9 \times 2} (i) = 3\sqrt{2}i$	$\sqrt{-20} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{-1}$ $= \sqrt{5 \times 4} (i) = 2\sqrt{5}i$

### تعريف:

العدد المركب: هو العدد الذي يكتب بصيغة (a+bi) حيث يسمى:

a جزؤه الحقيقي

a, b ∈ R

b جزؤه التخيلي

يُرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز (

\* تسمى الصيغة a+bi الصيغة العادية للعدد المركب.

أو الصيغة الجبرية للعدد المركب.

\* يمكن كتابة العدد المركب بشكل زوج مرتب (a, b) وتسمى الصيغة الديكارتية للعدد المركب.

العدد المركب الصيغة الجبرية	الصيغة الديكارتية	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
2 + 3i	(2, 3)	2	3
-2 - 3i	(-2, -3)	-2	-3
$\sqrt{3} - i$	( $\sqrt{3}$ , -1)	$\sqrt{3}$	-1
2i	(0, 2)	0	2
3	(3, 0)	3	0

$$\rightarrow 2i = 0 + 2i$$

$$\rightarrow 3 = 3 + 0i$$



## قوى (i)

عند تبسيط  $i^n$  نقسم الأس على 4 وكلها في الصيغة التالية:

بقية القسمة  
بقية القسمة

$$i^n = (i^4)^{\text{بقية القسمة}} \cdot (i^{\text{بقية القسمة}})$$

$$i^n = \{i, -i, 1, -1\}$$

بقية القسمة = 1 ←  
بقية القسمة = 2 ←  
بقية القسمة = 3 ←  
بقية القسمة = 0 ←

بسط ما يلي:

مثال

5

$$i^{999} = (i^4)^{249} \cdot i^3$$

$$= (1)^{249} (-i) = -i$$

1

$$i^{25} = (i^4)^6 \cdot (i)^1$$

بقية القسمة = 4 ←  
بقية القسمة = 1 ←

$$= (1)^6 \cdot i = i$$

6

$$i^{4n+1} = (i^4)^n \cdot i$$

$$= (1)^n \cdot i = i$$

2

$$i^{58} = (i^4)^{14} \cdot i^2$$

$$= (1)^{14} \cdot i^2 = 1 * -1 = -1$$

نتيجة  $i^n$  هو:

$$\{i, -i, 1, -1\}$$

3

$$i^5 = (i^4)^1 \cdot i$$

$$= 1 (i) = i$$

جد ناتج:

سؤال إضافي

$$i^{6n+1} = (i^6)^n \cdot i$$

$$= (-1)^n i$$

عندما  $n$  = عدد زوجي

$$(-1)^n = 1 \Rightarrow i^{6n+1} = i$$

عندما  $n$  = عدد فردي

$$(-1)^n = -1 \Rightarrow i^{6n+1} = -i$$

4

$$i^6 = (i^4)^1 \cdot i^2$$

$$= (1) (-1) = -1$$



ملاحظة

إذا كان الاس سالب ينزل للمقام ونغير الإشارة ثم نبسط كما سبق وبعدها نضرب الكسرب (  $i^4$  ) حيث  $i^4 = 1$  أي لا نأثر على الكسر (يُعتبر الضرب في واحد).

7  $i^{-17}$

$$= \frac{1}{i^{17}} = \frac{1}{(i^4)^4 \cdot i} = \frac{1}{i} (i^4) \\ = i^3 = -i$$

8  $i^{-13}$

$$= \frac{1}{(i^4)^3 i} = \frac{1}{i} (i^4) \\ = i^3 = -i$$

اتفاق

كل سؤال في أي موضوع في هذا الفصل عندما نرى  $i$  مرفوعة إلى الاس نقوم بتبسيط ( $i$ ) قبل التفكير بأي شيء، مهما كان السؤال (ونبسط كما في الطريقة السابقة).



العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

في مجموعة الأعداد المركبة يوجد عمليات رياضية كالتي مرت عليك (الجمع - الطرح - الضرب - القسمة - الجذور التربيعية والتكعيبية - النظير الجمعي والضربي ... الخ) وسنتطرق إليها بالتفصيل.

**أولاً: عملية الجمع:** عند جمع عددين مركبين نجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي وبحسب الإشارة.

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي:

مثال

$$\begin{aligned} 6 \quad & \left(\frac{5}{2} - i\right) + \left(\frac{1}{5} + 2i\right) \\ & \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{5}\right) + (-i + 2i) \\ & \frac{27}{10} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad & (3 + 4i) + (2 + 5i) \\ & (3+2) + (4i + 5i) = 5 + 9i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & (5 + 7i) + (-3 - 9i) \\ & (5-3) + (7i - 9i) = 2 - 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad & (-7 + 2i) + (2 - 5i) \\ & (-7 + 2) + (2i - 5i) = -5 - 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad & (3 + 4\sqrt{2}i) + (-3 - 2\sqrt{2}i) \\ & (3-3) + (4\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i) = 0 + 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & 3 + 2 - 5i \\ & (3 + 0i) + (2 - 5i) \\ & (3 + 2) + (0i - 5i) = 5 - 5i \end{aligned}$$



**ثانياً: عملية الطرح:** عند الطرح يتم توزيع اشارة السالب على القوس ثم نجري عملية الجمع أو الطرح بحسب الاشارات .

مثال

جد ناتج ما يأتي:

3  $(3\sqrt{2} + \sqrt{5}i) - (\sqrt{2} + 3\sqrt{5}i)$

$$(3\sqrt{2} + \sqrt{5}i) + (-\sqrt{2} - 3\sqrt{5}i)$$

$$(3\sqrt{2} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5}i - 3\sqrt{5}i) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}i$$

1  $(7 - 13i) - (9 + 4i)$

$$(7 - 13i) + (-9 - 4i)$$

$$(7 - 9) + (-13 - 4i) = -2 - 17i$$

4  $3 - (5 - 3i)$

$$(3 + 0i) + (-5 + 3i)$$

$$(3 - 5) + (0i + 3i) = -2 + 3i$$

2  $(5 + 3i) - (2 - 4i)$

$$(5 + 3i) + (-2 + 4i)$$

$$(5 - 2) + (3i + 4i) = 3 + 7i$$

**ثالثاً: عملية الضرب:** عند ضرب عددين مركبين نوزع الاقواس . هنا تذكر أن  $(i^2 = -1)$  .

مثال

جد ناتج ما يأتي:

3  $(10 + 3i)(0 + 6i)$

$$0 + 60i + 0i + 18i^2 = -18 + 60i$$

((نعكس))

4  $(2 + 3i)(-3 + 5i)$

$$-6 + 10i - 9i + 15i^2$$

$$-6 + i - 15 = -21 + i$$

5  $i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i$

6  $\frac{-5}{2}(4 + 3i) = \left(\frac{-5}{2} \times 4\right) + \left(\frac{-5}{2} \times 3i\right)$

$$= -10 - \frac{15}{2}i$$

1  $(3 + 2i)(5 + 4i)$

$$15 + 12i + 10i + 8i^2$$

$$15 + 22i - 8 = 7 + 22i$$

(( $i^2$  تعكس اشارة ما قبلها وتحذف))

2  $(2 - 3i)(3 + 5i)$

$$6 + 10i - 9i - 15i^2$$

طرح

((نعكس الاشارة وتحذف))

$$6 + i + 15 = 21 + i$$



رابطه عملية القسمة قبل التطرق الى القسمة يجب التعرف على مرافق العدد المركب.

$$C = a + bi \Rightarrow \bar{C} = a - bi$$

مرافق العدد المركب:

هو عكس اشارة الجزء التخيلي للعدد المركب فقط. نرمز له بالرمز  $\bar{C}$ .

$$C_1 = 2 + 3i \rightarrow \bar{C}_1 = 2 - 3i$$

$$C_2 = 4 + 5i \rightarrow \bar{C}_2 = 4 - 5i$$

$$\overline{1 + i} = 1 - i$$

انتبه!

$$\left[ \begin{array}{l} C_1 = -3 + 4i \\ C_2 = 3 - 4i \end{array} \right]$$

غير مترافقات لأن اشارة الجزء الحقيقي تغيرت أيضاً.

$$\left[ \begin{array}{l} C_1 = (3i - 5) \\ C_2 = (-3i - 5) \end{array} \right]$$

العددان مترافقان لأن اشارة الجزء التخيلي هي فقط التي تغيرت والاختلاف فقط في الترتيب.

$$(C \cdot \bar{C} = a^2 + b^2)$$

عند ضرب عددين مترافقين فيكون الناتج:

$$(التخيلي)^2 + (الحقيقي)^2$$

$$\text{1} \quad (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

انتبه! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم نأخذه

$$\text{2} \quad (1 - i)(1 + i) = (1)^2 + (1)^2 = 2$$

انتبه! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم

$$\text{3} \quad (-2 + i)(-2 - i) = (-2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5$$

انتبه! الجزء التخيلي بدون i فقط الرقم



\* عند وجود البسط والمقام في الاعداد المركبة نضرب البسط والمقام في مرافق العدد المركب الموجود في المقام .

$$\frac{\text{بسط}}{\text{مقام (i)}} \times \frac{\text{مرافق المقام}}{\text{مرافق المقام}}$$

ممنوع (i) بالمقام i مقام = مرافق

جد ناتج ما يأتي بصيغة  $a + bi$

مثال

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2i}{-2 + i} &= \frac{1 + 2i}{-2 + i} \cdot \frac{-2 - i}{-2 - i} \\ &= \frac{-2 - i - 4i - 2i^2}{(-2)^2 + (1)^2} = +2 \\ &= \frac{-2 - 5i + 2}{5} = \frac{-5i}{5} = 0 - i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3 + 4i}{3 - 4i} &= \frac{3 + 4i}{3 - 4i} \cdot \frac{3 + 4i}{3 + 4i} \\ &= \frac{9 + 12i + 12i + 16i^2}{(3)^2 + (4)^2} \\ &= \frac{-7 + 24i}{25} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{12 + i}{i} &= \frac{12 + i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} \\ &= \frac{-12i - i^2}{0 + 1} = \frac{1 - 12i}{1} \\ &= 1 - 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 - i}{3 + 4i} &= \frac{2 - i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \\ &= \frac{6 - 8i - 3i + 4i^2}{(3)^2 + (4)^2} \\ &= \frac{2 - 11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{2 + 3i} &= \frac{i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} \\ &= \frac{2i - 3i^2}{(2)^2 + (3)^2} \\ &= \frac{3 + 2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + i}{1 - i} &= \frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{1 + i + i + i^2}{(1)^2 + (1)^2} = \frac{2i}{2} = i \\ &= 0 + i \end{aligned}$$



7  $z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i}$

$$z = \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$z = \frac{1 - \sqrt{3}i - \sqrt{3}i - 3}{1 + 3} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{4}$$

$$z = \frac{-2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}i = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

8  $z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i}$

$$z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$$

$$z = \frac{7 - 14\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 6}{1 + 12} = \frac{13 - 13\sqrt{3}i}{13}$$

$$z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}}{13}i = 1 - \sqrt{3}i$$

خامسة النظرية الضربية  $\frac{1}{C}$  أو  $C^{-1}$  هو مقلوب العدد المركب

مثال جد النظرية الضربية لعدد  $C = 2 - 2i$  وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

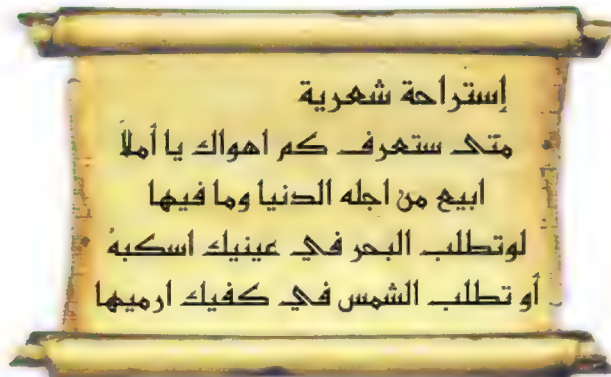
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2 - 2i} \cdot \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = \frac{2 + 2i}{2^2 + 2^2} = \frac{2 + 2i}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2}{8}i$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

سادسة النظرية الجمعية هو عكس العدد المركب في الإشارة  $(-C)$ .

$$\begin{aligned} C = 2 + 3i &\rightarrow -C = -2 - 3i \\ C = 3 + 7i &\rightarrow -C = -3 - 7i \\ C = 3 + i &\rightarrow -C = -3 - i \\ C = -2 + 2i &\rightarrow -C = 2 - 2i \end{aligned}$$

مجموع عدد مركب ونظيره الجمعية = صفر





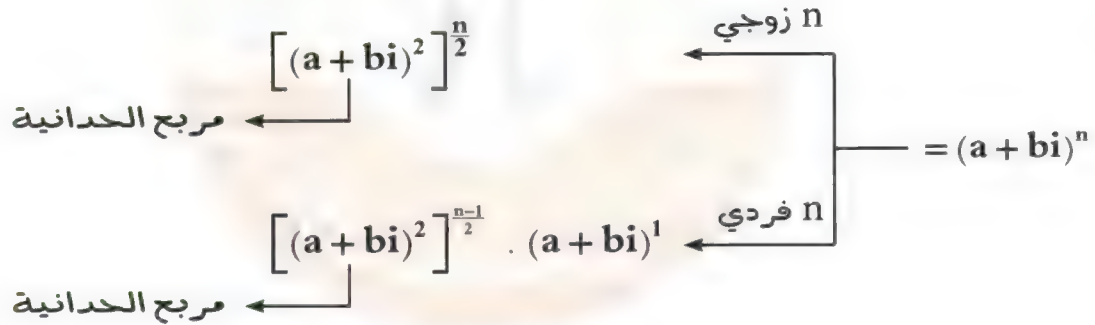
## القوس المرفوع إلى الاس

**أولاً:** إذا كان القوس  $(a + bi)^2$  نفتح القوس مربع حدانية.

**ثانياً:** إذا كان القوس  $(a + bi)^3$  نجزء القوس  $^1$  ( $^2$ ) نفتح التربيع مربع حدانية ثم نضرب الناتج بالقوس الثاني.

**ثالثاً:** إذا كان القوس  $(a + bi)^4$  يصبح  $[(a + bi)^2]^2$  ثم نفتح القوس مربع حدانية والناتج أيضاً مربع حدانية.

**رابعاً:** القوى الأكبر:



**خامساً:** إذا كان لدينا  $\left(\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}\right)^n$ .

نتخلص من البسط والمقام بالدرجة الأولى (نضرب داخل القوس في المرافق).

بعد وضع داخل القوس بصيغة  $a + bi$  نفتح الاس بحسب السؤال. (راجع مثال رقم 6)

في صفحة 15 والسؤال الثاني في صفحة 18).



مثال 1

ضع بصورة  $a + bi$

((نفتح التربيع مربع حدانية))  $(3 + 4i)^2$

$$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2$$

$i^2$  تحذف وتحسب  
الشارة ما قبلها

$$= -7 + 24i$$

مثال 2

ضع بالصيغة العادية للعدد المركب:

$$(2 + 3i)^2 + (12 + 2i)^2$$

$$(4 + 12i + 9i^2) + (144 + 48i + 4i^2)$$

$$4 + 12i - 9 + 144 + 48i - 4$$

$$(4 - 9 + 144 - 4) + (12i + 48i) = 135 + 60i$$

تخيلي      حقيقي

مثال 3

ضع بصورة  $a + bi$

$$(1 + i)^2 + (1 - i)^2$$

$$(1 + 2i + i^2) + (1 - 2i + i^2)$$

$$(1 + 2i - 1) + (1 - 2i - 1) = 0 + 0i$$

مثال 4

ضع بصورة  $a + bi$

$$(1 + i)^4 - (1 - i)^4$$

$$[(1 + i)^2]^2 - [(1 - i)^2]^2$$

$$(1 + 2i - 1)^2 - (1 - 2i - 1)^2$$

$$(2i)^2 - (-2i)^2$$

$$4i^2 - 4i^2 = 0 + 0i$$

مثال 5

ضع بالصيغة العادية للعدد المركب:

$$(1 + i)^3 + (1 - i)^3$$

$$(1 + i)^2 (1 + i) + (1 - i)^2 (1 - i)$$

$$(1 + 2i - 1)(1 + i) + (1 - 2i - 1)(1 - i)$$

$$2i(1 + i) - 2i(1 - i)$$

$$2i + 2i^2 - 2i + 2i^2 = 4i^2 = -4 + 0i$$

مثال 6

ضع بالصيغة الجبرية للعدد المركب  $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^3$$

$$= \left(\frac{3 - 3i + i - i^2}{(1)^2 + (1)^2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{4 - 2i}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{2} - \frac{2}{2}i\right)^3$$

$$= (2 - i)^3 = (2 - i)^2 (2 - i)$$

$$= (4 - 4i - 1)(2 - i)$$

$$= (3 - 4i)(2 - i) \text{ توزيع}$$

$$= 6 - 3i - 8i - 4$$

$$= 2 - 11i$$



مثال إثبت أن:

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$$

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{1-2i-1}{1+i} + \frac{1+2i-1}{1-i} \\ &= \left( \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \right) + \left( \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} \right) \\ &= \frac{-2i-2}{(1)^2+(1)^2} + \frac{2i-2}{(1)^2+(1)^2} \\ &= \frac{-2i-2+2i-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \\ &= \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

مثال صرح بصورة  $a + bi$

$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i} &= \frac{2+8i+3i-12}{4+i-4i+1} \\ &= \frac{-10+11i}{5-3i} = \frac{-10+11i}{5-3i} \cdot \frac{5+3i}{5+3i} \\ &= \frac{-50-30i+55i-33}{5^2+3^2} \\ &= \frac{-83+25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i \end{aligned}$$

تابعونا على التليكرام

@iQRES



مثال إثبت أن:

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$$

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= (1-i)(1+1)(1-(-i)) \\ &= 2(1-i)(1+i) \\ &\quad \text{مترافقان} \\ &= 2(1^2+1^2) \\ &= 2(2)=4 = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$

تذكر

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \end{aligned}$$

مثال إثبت أن:

$$\frac{1}{(2-i)^2} - \frac{1}{(2+i)^2} = \frac{8}{25}i$$

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيسر} &= \frac{1}{4-4i-1} - \frac{1}{4+4i-1} \\ &= \frac{1}{3-4i} - \frac{1}{3+4i} \\ &= \left( \frac{1}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} \right) - \left( \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} \right) \quad \text{مرافق} \\ &= \frac{3+4i}{25} - \frac{3-4i}{25} = \frac{(3+4i)-(3-4i)}{25} \\ &= \frac{8i}{25} = \frac{8}{25}i = \text{الطرف الأيمن} \end{aligned}$$



إذا كان  $C_1 = 1+i$  ,  $C_2 = 3-2i$  تحقق من أن:

مثال

3  $\overline{C_1 \cdot C_2} = \overline{C_1} \cdot \overline{C_2}$

L.H.S

$$\begin{aligned}\overline{C_1 \cdot C_2} &= \overline{(1+i)(3-2i)} \\ &= \overline{3-2i+3i+2} = \overline{5+i} \\ &= 5-i\end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned}\overline{C_1} \cdot \overline{C_2} &= \overline{(1+i)} \cdot \overline{(3-2i)} \\ &= (1-i)(3+2i) \\ &= 3+2i-3i+2=5-i\end{aligned}$$

R.H.S = L.H.S

1  $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

L.H.S

$$\begin{aligned}\overline{C_1 + C_2} &= \overline{(1+i)+(3-2i)} \\ &= \overline{4-i} = 4+i\end{aligned}$$

R.H.S

$$\begin{aligned}\overline{C_1} + \overline{C_2} &= \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)} \\ &= (1-i) + (3+2i) \\ &= 4+i\end{aligned}$$

L.H.S = R.H.S

4  $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{3+2i+3i-2}{3^2+2^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+5i}{9+4}\right)}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} &= \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}} = \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} \\ &= \frac{3-2i-3i-2}{(3)^2+(2)^2} = \frac{1-5i}{13}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

R.H.S = L.H.S

2  $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

L.H.S  $\overline{C_1 - C_2}$

$$\begin{aligned}&= \overline{(1+i)-(3-2i)} \\ &= \overline{(1+i)+(-3+2i)} = \overline{-2+3i} \\ &= -2-3i\end{aligned}$$

R.H.S  $\overline{C_1} - \overline{C_2}$

$$\begin{aligned}&= \overline{(1+i)} - \overline{(3-2i)} \\ &= (1-i) - (3+2i) \\ &= (1-i)+(-3-2i) = -2-3i\end{aligned}$$

R.H.S = L.H.S





أسئلة وزارية حول الحالات السابقة

سؤال 1

ضع بالصورة العادية للعدد المركب:

1998 - د (1)

$$(1+3i)^2 + (3-2i)^2$$

$$(1+6i-9) + (9-12i-4)$$

$$(-8+6i) + (5-12i)$$

$$(-8+5) + (6i-12i) = -3-6i$$

سؤال 4

ضع ما يأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي.

2002 - د (1)

$$(3+2i)(-2+i)$$

$$-6+3i-4i-2 = -8-i$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{-8-i} \cdot \frac{-8+i}{-8+i}$$

$$= \frac{-8+i}{(-8)^2 + (-1)^2} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$$

سؤال 2

ضع بالصورة العادية للعدد المركب:

1999 - د (1)

$$\left(\frac{3-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3-3i-i-1}{(1)^2 + (1)^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2-4i}{2}\right)^2 = (1-2i)^2$$

$$= 1-4i-4 = -3-4i$$

سؤال 5

جد النظير الضربي للعدد المركب  $(3+5i)$  ثم ضعه بالصيغة العادية.

2003 - د (1)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{3+5i} \cdot \frac{3-5i}{3-5i}$$

$$= \frac{3-5i}{(3)^2 + (5)^2} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$$

سؤال 3

إذا كانت  $y = 3-i$  ,  $x = 2+3i$

جد قيمة  $x^2 + 2y^2$

نعوض  $y$  ,  $x$  بالعلامة اعلاه

2000 - د (1)

$$(2+3i)^2 + 2(3-i)^2$$

$$(4+12i-9) + 2(9-6i-1)$$

$$-5+12i+18-12i-2 = 11+0i$$

سؤال 6

جد الصيغة العادية للعدد المركب:

2004 - د (2)

$$(1-\sqrt{3}i)^2 - (2-\sqrt{3}i)^2$$

$$(1-2\sqrt{3}i-3) - (4-4\sqrt{3}i-3)$$

$$(-2-2\sqrt{3}i) - (1-4\sqrt{3}i)$$

$$(-2-2\sqrt{3}i) + (-1+4\sqrt{3}i) = -3+2\sqrt{3}i$$

سؤال 7

جد ناتج ما يأتي بالصيغة الديكارتية:

2005 - د (1)

$$(3+4i)^2 + (5-3i)(1+i)$$

$$(9+24i-16) + (5+5i-3i+3)$$

$$(-7+24i) + (8+2i)$$

$$(-7+8) + (24i+2i) = 1+26i$$

$$(1.26)$$





سؤال 10  
ضح المقدار  $\frac{(1-i)^{13}}{64}$  بالصيغة العادية.

2013  
خارج القطر

$$\begin{aligned}\frac{(1-i)^{13}}{64} &= \frac{[(1-i)^2]^6 \cdot (1-i)}{64} \\ &= \frac{(\cancel{1} - 2i + \cancel{1})^6 (1-i)}{64} \\ &= \frac{(-2i)^6 (1-i)}{64} \\ &= \frac{\cancel{64}i^6 (1-i)}{\cancel{64}} = -1(1-i) = -1+i\end{aligned}$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2$$

$$= (1)(-1) = -1$$

توضيح

إستراحة شهرية

يكفي بأنني مُدّ وجدتكَ صوت أعرف ما أريد  
ووجدت روعي خلف بسمتك التي صارت بها  
الأيام عيد  
بالله قلّ لـجـ... كيف احلم بالمزيد؟!

WWW.D-RE.COM

سؤال 8  
إذا كان  $x = 2i - 1$  جد قيمة  $x^2 + 2x + 6$

2000  
خارج القطر

$$\begin{aligned}x &= -1 + 2i \quad (\text{ترتيب}) \\ (-1 + 2i)^2 + 2(-1 + 2i) + 6 \\ (1 - 4i - 4) - 2 + 4i + 6 \\ -3 - \cancel{4i} + 4 + \cancel{4i} &= 1 + 0i\end{aligned}$$

سؤال 9  
ضح بالصورة العادية للعدد المركب:

2012 - د (2)

$$\begin{aligned}(1+i)^5 - (1-i)^5 \\ (1+i)^5 &= [(1+i)^2]^2 (1+i) \\ &= (\cancel{1} + 2i + \cancel{i^2})^2 (1+i) \\ &= (2i)^2 (1+i) = 4i^2 (1+i) \\ &= -4(1+i) = -4 - 4i \\ (1-i)^5 &= [(1-i)^2]^2 (1-i) \\ &= (\cancel{1} - 2i + \cancel{i^2})^2 (1-i) \\ &= (-2i)^2 (1-i) = 4i^2 (1-i) \\ &= -4(1-i) = -4 + 4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+i)^5 - (1-i)^5 \\ (-4 - 4i) - (-4 + 4i) \\ (-4 - 4i) + (4 - 4i) &= 0 - 8i\end{aligned}$$





## التحليل في مجموعة الأعداد المركبة

**أولاً:** مجموع مربعين: عندما يكون لدينا مجموع مربعين  $(x^2 + y^2)$  نضرب الحد الثاني بـ  $(-i^2)$  ثم يصبح فرق بين مربعين ونحلل.  
أي: نضج  $i^2$  مع الحد الثاني ونعكس اشارته.

$$\boxed{1} \quad x^2 + y^2$$

$$x^2 - y^2 i^2 = (x - yi)(x + yi)$$

$$\boxed{3} \quad a^2 + 36b^2$$

$$a^2 - 36b^2 i^2 = (a + 6bi)(a - 6bi)$$

$$\boxed{2} \quad x^2 + 4$$

$$x^2 - 4i^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

$$\boxed{4} \quad y^2 + 100$$

$$y^2 - 100i^2 = (y - 10i)(y + 10i)$$

**ملاحظة:** إذا طلب في السؤال تحليل عدد الى حاصل ضرب عددين مركبين يكون التحليل كما ورد اعلاه. (مجموع مربعين).

$1^2=1$	$6^2=36$	$11^2=121$
$2^2=4$	$7^2=49$	$12^2=144$
$3^2=9$	$8^2=64$	$13^2=169$
$4^2=16$	$9^2=81$	$14^2=196$
$5^2=25$	$10^2=100$	$15^2=225$

\* عندما يعطي في السؤال رقم نبحث عن عددين من الارقام اعلاه عند جمعهم يعطي العدد الذي في السؤال ويصبح مجموع مربعين.

مثلاً: العدد  $25 \leftarrow 16 + 9$   
العدد  $85 \leftarrow 81 + 4$   
وبعدها نغير اشارة الـ + الى - ونضج  $i^2$  ونحلل كما في الامثلة:





مثال

حل كل ما يأتي الى حاصل ضرب عاملين بصورة  $a+bi$

1

$$10 = 9 + 1$$

$$= 9 - i^2$$

$$= (3 - i)(3 + i)$$

أو

$$10 = 1 + 9$$

$$= 1 - 9i^2$$

$$= (1 - 3i)(1 + 3i)$$

2

$$29 = 25 + 4$$

$$= 25 - 4i^2$$

$$= (5 - 2i)(5 + 2i)$$

أو

$$29 = 4 + 25$$

$$= 4 - 25i^2$$

$$= (2 - 5i)(2 + 5i)$$

3

$$41 = 25 + 16$$

$$= 25 - 16i^2$$

$$= (5 - 4i)(5 + 4i)$$

أو

$$41 = 16 + 25$$

$$= 16 - 25i^2$$

$$= (4 - 5i)(4 + 5i)$$

4

$$53 = 4 + 49$$

$$= 4 - 9i^2$$

$$= (7 - 2i)(7 + 2i)$$

$$= (2 - 7i)(2 + 7i)$$

أو

$$53 = 49 + 4$$

$$= 49 - 4i^2$$

$$= (2 - 7i)(2 + 7i)$$

$$= (7 - 2i)(7 + 2i)$$

5

$$85 = 81 + 4$$

$$= 81 - 4i^2$$

$$= (9 - 2i)(9 + 2i)$$

أو

$$85 = 4 + 81$$

$$= 4 - 81i^2$$

$$= (2 - 9i)(2 + 9i)$$

6

$$125 = 121 + 4$$

$$= 121 - 4i^2$$

$$= (11 - 2i)(11 + 2i)$$

أو

$$125 = 4 + 121$$

$$= 4 - 121i^2$$

$$= (2 - 11i)(2 + 11i)$$



**ملاحظة** هناك سؤال غالباً ما يرد في اسئلة الامتحانات الشهرية لبعض المدارس وهي كفكرة غير واردة بشكل صريح في المنهج سوف نتطرق اليها من باب الاحتياط.

سؤال  دون الضرب بالمرافق ضح بصورة  $a+bi$

((هذه هي صيغة السؤال))

**أولاً:** إذا اعطى في البسط عدد قابل للتحليل مباشرة والاختصار مع المقام مثلاً:

$$1 \quad \frac{25}{3+4i} \Rightarrow \frac{9+16}{3+4i} = \frac{9-16i^2}{3+4i} = \frac{(3-4i)(3+4i)}{(3+4i)} = 3-4i$$

$$2 \quad \frac{73}{8-3i} \Rightarrow \frac{64+9}{8-3i} = \frac{64-9i^2}{8-3i} = \frac{(8-3i)(8+3i)}{(8-3i)} = 8+3i$$

**ثانياً:** إذا كان العدد يحتاج إلى تجزئة مثلاً:

$$\frac{40}{1+3i} = \frac{4(10)}{1+3i} = \frac{4(1+9)}{1+3i} = \frac{4(1-9i^2)}{1+3i} = \frac{4(1-3i)(1+3i)}{(1+3i)} = 4-12i$$

انظر أن المقام هو  $10 = 1^2 + 3^2$  والعدد في الأعلى 40 لذلك نقول  $4(10)$

أما الأمثلة ((الأولى والثانية)) المقام العدد موجود مباشرة نحل

$$\begin{cases} 3^2 + 4^2 = 25 \\ 8^2 + 3^2 = 73 \end{cases}$$



ثالثا: إذا كان البسط لا يحوي عدد للتحليل فأنا نضرب الكسر بـ :

$$^2(\text{التخيلي}) + ^2(\text{الحقيقي}) \text{ التوضيح في المثال:}$$

$$\frac{3-i}{2+i}$$

نأخذ المقام

$$\begin{array}{c} 2+i \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2^2 \quad 1^2 \end{array}$$

$$2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

نضرب البسط  $\times \frac{5}{5}$  ونحلل الـ (5) التي في البسط وكتبا يلي:

$$\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{5}{5} \quad \text{تحلل}$$

$$\begin{aligned} \frac{3-i}{2+i} \cdot \left(\frac{4+1}{5}\right) &\Rightarrow \frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{4-i^2}{5} \Rightarrow \frac{3-i}{(2+i)} \cdot \frac{(2+i)(2-i)}{5} \\ &= \frac{(3-i)(2-i)}{5} \\ &= \frac{6-3i-2i}{5} = \frac{5-5i}{5} \\ &= 1-i \end{aligned}$$

الطريق الى النجاح  
هو دائما  
"تحت الانشاء"  
WWW.IQ-RES.COM



**ثانياً:** مجموع مكعبين / فرق بين مكعبين : نضرب الحد الثاني بـ  $(-i^2)$  ثم نحلل (فرق / مجموع) مكعبين .

$$x^3 - 27i \xrightarrow{-i^2}$$

**تذكر** قانون مكعبين

$$x^3 + 27i^3 = (x + 3i)(x^2 - 3xi - 9)$$

مربع الأول (عكس الإشارة) الأول  $\times$  الثاني + مربع الثاني

**ثالثاً:** التجربة: في حالة وجود  $(i)$  في الحد الوسط نضرب الأخير بـ  $(-i^2)$  ثم نحلل تجربه .

$$x^2 - 3ix + 4 \xleftarrow{\text{انظر}}$$

$$x^2 - 3ix - 4i^2 = (x + i)(x - 4i)$$

$$x^2 + xi + 6$$

$$x^2 + xi - 6i^2 = (x + 3i)(x - 2i)$$

**رابعاً:** أكمال المربع: عندما لا يحل السؤال بالتجربة ولا يوجد  $(i)$  في الوسط نضيف  $\left(\frac{1}{2} \text{ معامل } x\right)^2$  ونطرحه .

$$x^2 + 6x + 25$$

نضيف معامل  $x$  هو (3)

تربيع (3) هو 9

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + 25$$

نضيف 9 ونطرح 9

$$(x + 3)^2 + 16 \quad \text{أصبح مجموع مربعين}$$

$$(x + 3)^2 - 16i^2$$

$$(x + 3 + 4i)(x + 3 - 4i)$$

ايجاد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

**أولاً:** أنظر إلى السؤال بتركيز وقم بفتح الأقواس أن وجدت والتخلص من التربيع والتكعيب ... الخ.

**ثانياً:** حاول تصفية الطرفين بحيث يصبح

الحقيقي = الحقيقي

التخيلي = التخيلي (نأخذ المعاملات فقط بدون  $i$ )

**ثالثاً:** انتبه لوجود التحليل "فرق مربعين / تجربة / عدد ... الخ"

**رابعاً:** لا تقوم بضرب المرافق في حالة وجود  $x$  أو  $y$  في البسط أو المقام وحاول أن تجد مخرج آخر لحل السؤال حسب الصيغة.

**خامساً:** إذا أعطى في السؤال مقدارين وذكر عبارة ان المقدارين مترافقان فنتبع الخطوات التالية:

- 1- نقوم بوضع علامة ( = ) بين المقدارين مع تغيير اشارة الجزء التخيلي لأحد الأطراف فقط.
- 2- نقوم بتصفية الاطراف بحسب الملاحظات كالضرب بالمرافق أو فتح التربيع أو غيرها ثم نكمل الحل.

راجع مثال (9) ومثال (10)



WWW.IQ-RES.COM



@IQRES



/IQRES

موقع طلاب العراق



مثال 3

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$2x - 1 + 2i = 1 + (y + 1)i$$

تخيلي

حقيقي

$$2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 1 + 1 \Rightarrow [2x = 2] \div 2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$y + 1 = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 \Rightarrow y = 1$$

مثال 4

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$y + 5i = (2x + i)(x + 2i)$$

((نفتح الأقواس))

$$y + 5i = 2x^2 + 4xi + xi - 2$$

جمع

$$y + 5i = (2x^2 - 2) + 5xi$$

$$[5x = 5] \div 5 \Rightarrow x = 1$$

$$y = 2x^2 - 2$$

$$y = 2(1)^2 - 2$$

$$y = 2 - 2 \Rightarrow y = 0$$

مثال 2

جد قيم  $x, y$  الحقيقيتين:

$$3x + 4i = 2 + 8yi$$

التخيلي = التخيلي

الحقيقي = الحقيقي

$$(3x = 2) \div 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(8y = 4) \div 8 \Rightarrow y = \frac{4}{8} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

مثال 2

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$2y + 1 - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

$$(2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$$

تخيلي

حقيقي

$$2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -8 - 1$$

$$[2y = -9] \div 2$$

$$y = \frac{-9}{2}$$

$$-(2x - 1) = 3$$

$$-2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 3 - 1$$

$$[-2x = 2] \div -2$$

$$x = -1$$

مثال 5

جد قيمة كل من  $x, y$  الحقيقيتين

واللتان تحققان المعادلة.

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + x + yi = (1+2i)^2$$

مربع حدانية

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + x + yi = 1 + 4i - 4$$

مُرافق

$$\left(\frac{1-i-i-i}{1^2+1^2}\right) + x + yi = -3 + 4i$$

$$\frac{-2i}{2} + x + yi = -3 + 4i$$

+i

$$x + yi = -3 + 5i$$

$$x = -3$$

$$y = 5$$

مثال 6

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$8i = (x+2i)(y+2i)+1$$

فتح الأقواس

$$8i = xy + 2xi + 2yi - 4 + 1$$

$$0 + 8i = (xy - 3) + (2x + 2y)i$$

حقيقي تخيلي

$$xy - 3 = 0 \Rightarrow [xy = 3] \div x$$

$$y = \frac{3}{x} \dots \dots (1)$$

$$[2x + 2y = 8] \div 2 \quad \text{تخيلي} = \text{تخيلي}$$

نعوض (1) في (2)

$$x + y = 4 \dots \dots (2)$$

$$\left[x + \frac{3}{x} = 4\right] \cdot x$$

$$x^2 + 3 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\text{أما } x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$\text{أو } x-3=0 \Rightarrow x=3$$

نعوض  $x$  في معادلة (2) لبسط  $y$

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{1} = 3 \quad \text{عندما } x=1$$

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{عندما } x=3$$

x	y
1	3
3	1



$x, y \in \mathbb{R}$  جد قيم

مثال 6

$$\left(\frac{2-i}{1+i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i}\right)y = \frac{1}{i}$$

مُرافق

مُرافق

مُرافق

$$\left(\frac{2-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)x + \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{1-i}\right)y = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}$$

$$\left(\frac{2-2i-i-1}{(1)^2+(1)^2}\right)x + \left(\frac{6-3i-2i-1}{(2)^2+(1)^2}\right)y = \frac{-i}{0+i}$$

تذكر ان

$$\left(\frac{1-3i}{2}\right)x + \left(\frac{5-5i}{5}\right)y = 0-i$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)x + (1-i)y = 0-i$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}xi + y - yi = 0-i$$

$$\left[\frac{1}{2}x + y = 0\right] \cdot 2 \Rightarrow x + 2y = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$\left[\frac{-3}{2}x - y = -1\right] \cdot 2 \Rightarrow -3x - 2y = -2 \quad \dots\dots (2) \quad \text{جعل المعادلتين انياً}$$

$$x + 2y = 0$$

$$-3x - 2y = -2$$

بالجمع

$$[-2x = -2] \div -2 \Rightarrow x = 1$$

نعرض في (1)

$$x + 2y = 0$$

$$1 + 2y = 0 \Rightarrow [2y = -1] \div 2 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$$



$$x - yi = (-2 + 3i)(1 + 5i)$$

$$x - yi = -2 - 10i + 3i - 15$$

$$x - yi = -17 - 7i$$

$$x = -17, \quad -y = -7 \Rightarrow y = 7$$

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$  إذا علمت

$$\frac{3+i}{2-i}, \quad \frac{6}{x+yi} \quad \text{مترافقات}$$

$$\frac{6}{x+yi} = \left( \frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} \right)$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{6-3i-2i-1}{(2)^2 + (1)^2}$$

$$\frac{6}{x+yi} = \frac{5-5i}{5} \Rightarrow \frac{6}{x+yi} = \frac{5}{5} - \frac{5}{5}i$$

$$\frac{6}{x+yi} \Rightarrow 1-i \Rightarrow x+yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$x+yi = \frac{6+6i}{2}$$

$$x+yi = 3+3i$$

$$x = 3, \quad y = 3$$



جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

مثال 8

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$$

من التمارين العامة للكتاب

\* راجع تحليل مجموع مربعين  $(x^2+4)$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{(x-2i)(x+2i)}{(x+2i)}$$

$$y = (x-2i)(1+i)$$

$$y+0i = x+xi-2i+2$$

$$y+0i = (x+2) + (x-2)i$$

تخييلي حقيقي

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$y = x+2$$

$$y = 2+2 \Rightarrow y=4$$

إذا كان  $\frac{3-2i}{i}, \frac{x-yi}{1+5i}$  مترافقات

مثال 9

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3+2i}{-i}$$

((راجع الملاحظة خامساً))

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \left( \frac{3+2i}{-i} \cdot \frac{i}{i} \right) \quad ((\text{مرافق}))$$

$$\frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3i-2}{-i^2} = 1$$



مجموعة من الأسئلة الوزارية حول موضوع إيجاد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$  التي تحقق

سؤال 2

$$x(x+i) + y(y-i) + i = 13$$

(2000 - د 2)

$$x^2 + xi + y^2 - yi = 13 - i$$

$$(x^2 + y^2) + (x - y)i = 13 - i$$

تخيلي حقيقي

$$x^2 + y^2 = 13 \quad (1)$$

$$x - y = -1 \Rightarrow x = -1 + y \quad (2)$$

نعوض (2) في (1) لينتج

$$(-1 + y)^2 + y^2 = 13$$

$$1 - 2y + y^2 + y^2 - 13 = 0$$

$$[2y^2 - 2y - 12 = 0] \div (2)$$

$$y^2 - y - 6 = 0 \quad \text{تجربة}$$

$$(y + 2)(y - 3) = 0$$

$$\text{أما } y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$\text{أو } y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

نعوض  $y$  في معادلة (1)

$$x = -1 + y$$

$$x = -1 + (-2) \Leftarrow y = -2 \quad \text{عندما}$$

$$x = -3$$

$$x = -1 + 3 \Leftarrow y = 3 \quad \text{عندما}$$

$$x = 2$$

x	y
-3	-2
2	3

جد قيمتي  $x, y$  التي تحقق

سؤال 1

$$(2x+i)(y-2i) = -2-9i \quad (1996 - د 1)$$

$$2xy - 4xi + yi + 2 = -2 - 9i$$

$$(2xy + 2) + (-4x + y)i = -2 - 9i$$

$$2xy + 2 = -2 \quad (\text{الحقيقي} = \text{الحقيقي})$$

$$2xy = -2 - 2 \Rightarrow [2xy = -4] \div 2x$$

$$y = \frac{-2}{x} \quad (1)$$

(التخيلي = التخيلي)

$$-4x + y = -9 \quad (2)$$

بتعويض (1) في (2) ينتج

$$[-4x + \left(\frac{-2}{x}\right) = -9] \cdot x$$

$$-4x^2 - 2 = -9x \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$(4x-1)(x-2) = 0$$

$$\text{أما } 4x-1=0 \Rightarrow [4x=1] \div 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{أو } x-2=0 \Rightarrow x=2$$

نعوض  $x$  في (1) لإيجاد  $y$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\frac{1}{4}} = -8 \quad y = \frac{-2}{2} = -1$$

x	y
$\frac{1}{4}$	-8
2	-1

جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي

سؤال 4

تحقق:

(2) د - 1998

$$(2 + xi)(-x + i) = \frac{9y^2 + 49}{3y + 7i}$$

$$-2x + 2i - x^2i - x = \frac{9y^2 - 49i^2}{3y + 7i}$$

$$-3x + (2 - x^2)i = \frac{(3y + 7i)(3y - 7i)}{(3y + 7i)}$$

$$-3x + (2 - x^2)i = 3y - 7i$$

$$[-3x = 3y] \div 3 \Rightarrow y = -x \quad (1)$$

$$2 - x^2 = -7 \Rightarrow 2 + 7 = x^2$$

$$x^2 = 9 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm 3$$

$$y = -x$$

$$y = -3 \quad \leftarrow \quad x = 3 \quad \text{عندما}$$

$$y = -(-3) \quad \leftarrow \quad x = -3 \quad \text{عندما}$$

$$y = 3$$

جد قيم  $x, y \in \mathbb{R}$  والتي تحقق:

سؤال 5

(2) د - 1999

$$(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4 + 3i}$$

$$9x^2 + 12xyi - 4y^2 = \frac{200}{4 + 3i} \cdot \frac{4 - 3i}{4 - 3i}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800 - 600i}{(4)^2 + (3)^2}$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = \frac{800}{25} - \frac{600}{25}i$$

جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  التي تحقق

سؤال 3

2009

تمهيد

$$(3 + 2i)^2 y = (x + 3i)^2$$

$$(9 + 12i - 4)y = x^2 + 6xi - 9$$

$$(5 + 12i)y = (x^2 - 9) + 6xi$$

$$5y + 12yi = (x^2 - 9) + 6xi$$

$$5y = x^2 - 9 \quad \dots\dots\dots (1) \quad \text{(الحقيقي = الحقيقي)}$$

تعويض

(التخيلي = التخيلي)

$$12y = 6x \Rightarrow x = 2y \quad \dots\dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$5y = (2y)^2 - 9$$

$$5y = 4y^2 - 9 \Rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0$$

$$(4y - 9)(y + 1) = 0$$

$$\text{أما } 4y - 9 = 0 \Rightarrow [4y = 9] \div 4 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$$

$$\text{أو } y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

نعوض  $y$  في معادلة (2)

$$x = 2y = 2\left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$x = 2y = 2(-1) \Rightarrow x = -2$$

x	y
$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$
-2	-1



جد قيمتي  $x, y$  الحقيقيتين التي  
تحقق المعادلة:

سؤال 6

2016  
تمهيدي

$$\left(\frac{125}{11+2i}\right)x + (1-i)^2 y = 11$$

$$\left(\frac{125}{11+2i} \cdot \frac{11-2i}{11-2i}\right)x + (\cancel{1} - 2i \cancel{1})y = 11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{(11)^2 + (2)^2}\right)x - 2yi = 11$$

$$\left(\frac{125(11-2i)}{125}\right)x - 2yi = 11$$

$$(11-2i)x - 2yi = 11+0i$$

$$11x - 2xi - 2yi = 11+0i$$

$$(11x) + (-2x - 2y)i = 11+0i$$

$$[11x = 11] \div 11 \Rightarrow x = 1$$

(حقيقي = حقيقي)

$$[-2x - 2y = 0] \div -2$$

(تخيلي = تخيلي)

$$x + y = 0$$

$$1 + y = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$(9x^2 - 4y^2) + 12xyi = 32 - 24i$$

$$9x^2 - 4y^2 = 32 \quad \dots\dots (1)$$

$$[12xy = -24] \div 12x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad \dots\dots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$9x^2 - 4\left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 32 \Rightarrow \left[9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32\right] \cdot x^2$$

$$9x^4 - 16 = 32x^2 \Rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$$

$$(9x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{أما } 9x^2 + 4 = 0 \text{ يُهمل } \notin \mathbb{R}$$

$$\text{أو } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm 2$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

x	y
2	-1
-2	1

$$y = 2\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{50}{9} - 1$$

$$y = \frac{41}{9}$$

جد قيم  $X, Y$  الحقيقيين التي تحقق:

$$12 + 5i = (x + 3i)(y - 2i)$$

$$12 + 5i = xy - 2xi + 3yi + 6$$

$$xy + 6 = 12 \Rightarrow xy = 12 - 6$$

حقيقي حقيقي

$$\frac{xy}{x} = \frac{6}{x} \Rightarrow y = \frac{6}{x}$$

$$-2x + 3y = 5$$

$$-2x + 3\left(\frac{6}{x}\right) = 5 \Rightarrow \left[-2x + \frac{18}{x} = 5\right] \cdot x$$

$$-2x^2 + 18 = 5x \Rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0$$

$$(2x + 9)(x - 2) = 0$$

$$\text{أما } 2x + 9 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-9}{2} \Rightarrow x = \frac{-9}{2}$$

$$\text{أو } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y = \frac{6}{x}$$

$$x = -\frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{6}{-\frac{9}{2}} = 6\left(\frac{-2}{9}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  إذا علمت:

سؤال 7

(2) د - 2016

$$(x + 2i)(x - i) = \frac{121 + 9y^2}{11 + 3yi}$$

$$x^2 - xi + 2xi + 2 = \frac{121 - 9y^2 i^2}{11 + 3yi}$$

$$(x^2 + 2) + xi = \frac{(11 + 3yi)(11 - 3yi)}{(11 + 3yi)}$$

تخيلي - تخيلي

$$(x^2 + 2) + xi = 11 - 3yi$$

حقيقي - حقيقي

$$x^2 + 2 = 11 \Rightarrow x^2 = 11 - 2 \Rightarrow x^2 = 9 \text{ بالجذر}$$

$$x = \pm 3$$

$$x = -3y \div -3 \Rightarrow y = \frac{x}{-3} = \frac{\pm 3}{-3}$$

$$y = \pm 1$$

جد قيمتي  $x, y \in \mathbb{R}$  والتي تحقق:

سؤال 8

(2) د - 2008

$$y + 5i = (2x + i)(x + i)$$

$$y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi - 1$$

$$y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$$

$$y = 2x^2 - 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$



## الجدور التربيعية للعدد المركب

بالتربيع  $\sqrt{a+bi} = x+yi$  نفرض

$$a+bi = x^2 + 2xyi - y^2 \Rightarrow a+bi = (x^2 - y^2) + 2xyi \quad ((\text{ثابتة في الحل}))$$

((مربع حدانية))

$$x^2 - y^2 = a \quad \dots\dots(1) \quad \text{حقيقي - حقيقي} \quad \text{ثم}$$

$$\frac{2xy}{2x} = \frac{b}{2x} \quad \text{تخيلي = تخيلي}$$

$$y = \frac{b}{2x} \quad \dots\dots(2)$$

اشارة الجزء التخيلي  
لعدد السؤال

$$C = \bar{+}(x \bigcirc yi) \quad \leftarrow x, y \quad \text{الجدور هي}$$

النتاج:

$$C = \bar{+}(x \bigcirc yi)$$

اشارة الجزء التخيلي من السؤال

جد الجدور التربيعية:

مثال

1  $8+6i$

$$\sqrt{8+6i} = x+yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$8+6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 8 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = 6] \div 2x \Rightarrow \frac{2xy}{2x} = \frac{6}{2x}$$

$$y = \frac{3}{x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 8$$

نعوض (2) في (1)

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 9 = 8x^2$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad (\text{تجربة})$$

$$(x^2 + 1)(x^2 - 9) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \text{يُهل} \quad \notin \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{أو}} \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \bar{+} 3$$

$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow y = \frac{3}{\bar{+} 3} = \bar{+} 1$$

$$C = \bar{+}(3+i)$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = 3+i \\ C_2 = -3-i \end{array} \right\} ((\text{الجدور هي}))$$

3 -i

$\sqrt{0-i} = x + yi$  بالتربيع

$0 - i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$

$[2xy = -1] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-1}{2x} \dots\dots(2)$

$x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - \left(\frac{-1}{2x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{1}{4x^2} = 0\right] \cdot 4x^2$

$4x^4 - 1 = 0$  ((فرق بين مربعين))

$(2x^2 + 1)(2x^2 - 1) = 0$

أما  $2x^2 + 1 = 0$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

أو  $2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 1] \div 2$

$x^2 = \frac{1}{2}$  بالجزء  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$C = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

إشارة الجزء التخيلي  
لعدد السؤال

$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

2  $7 + 24i$

$\sqrt{7+24i} = x + yi$  بالتربيع

$7 + 24i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 7 \dots\dots(1)$

$[2xy = 24] \div 2x \Rightarrow y = \frac{12}{x} \dots\dots(2)$

$x^2 - y^2 = 7$

تعويض في  
معادلة (1)

$x^2 - \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 7 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{144}{x^2} = 7\right] \cdot x^2$

$x^4 - 144 = 7x^2 \Rightarrow x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 16) = 0$

أما  $x^2 + 9 = 0$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

بالجزء  $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16$

$x = \pm 4$

$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{\pm 4} = \pm 3$

$C_1 = \pm (4 + 3i)$

$C_1 = 4 + 3i$  ,  $C_2 = -4 - 3i$

توضيح

$C_1 = + (4 + 3i) = 4 + 3i$  (+) في حالة

$C_2 = - (4 + 3i) = -4 - 3i$  (-) في حالة



  $8i$

$\sqrt{0+8i} = x + yi$  بالتربيع

$0+8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$

$\left[\frac{2xy}{2x} = \frac{8}{2x}\right] \div 2x \Rightarrow y = \frac{4}{x} \dots\dots(2)$

$x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$

$x^4 - 16 = 0$  ((فرق بين مربعين))

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

أما  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$  بالجزر

$x = \pm 2$

أو  $x^2 + 4 = 0$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

$y = \frac{4}{x} = \frac{4}{\pm 2} = \pm 2$

$C = \pm(2 + 2i)$

$C_1 = 2 + 2i$

$C_2 = -2 - 2i$

  $-6i$

$\sqrt{0-6i} = x + yi$  بالتربيع

$0-6i = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$

$[2xy = -6] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-3}{x} \dots\dots(2)$

تعويض

$x^2 - y^2 = 0$

$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$

$x^4 - 9 = 0$  ((فرق بين مربعين))

$(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

أما  $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$  بالجزر

$x = \pm\sqrt{3}$

أو  $x^2 + 3 = 0$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

$y = \frac{-3}{x} = \frac{-3}{\pm\sqrt{3}} = \frac{-\left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\right)}{\pm\sqrt{3}}$

$y = \pm\sqrt{3}$

$\pm(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)$

$C_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$

$C_2 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$

$$\text{أو } 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 3] \div 2$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \quad \text{بالجذر} \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

توضيح

$$C = \pm \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$C_2 = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$-25$$

$$x = \sqrt{-25}$$

$$x = \pm 5i$$

$$-17$$

$$x = \sqrt{17} \cdot \sqrt{-1}$$

$$x = \pm \sqrt{17}i$$

$$\frac{4}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$\frac{4}{1 - \sqrt{3}i} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} = \frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{4(1 + \sqrt{3}i)}{4} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{3}i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$1 + \sqrt{3}i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = \sqrt{3}] \div 2x \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2x}\right)^2 = 1$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1\right] \cdot 4x^2$$

$$4x^4 - 3 = 4x^2$$

$$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0 \quad (\text{تجربة})$$

$$(2x^2 + 1)(2x^2 - 3) = 0$$

$$2x^2 + 1 = 0 \quad \text{يُهمل} \quad \notin \mathbb{R}$$



## أسئلة التمرين حول موضوع الجذور التربيعية

$$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$$

$$\left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] \cdot 4x^2 \Rightarrow 4x^4 - 9 = 16x^2$$

$$4x^4 - 16x^2 - 9 = 0$$

$$(2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad 2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow [2x^2 = 9] \div 2$$

$$x^2 = \frac{9}{2} \quad \text{بالجذر}$$

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\text{أو}} \quad 2x^2 + 1 = 0 \quad \notin \mathbb{R} \quad \text{يُهمَل}$$

$$y = \frac{3}{2x} = \frac{\cancel{3}}{(\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}) \pm \frac{3}{\sqrt{2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

((الشارة الجزء التخيلي))

$$C = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

سؤال 1 إذا كان  $c, d \in \mathbb{R} \quad C + di = \frac{7-4i}{2+i}$

1997 - د (1)

$$\sqrt{2c - di}$$

ملاحظة

عندما يعطى سؤال فيه علاقة تحتوي مجهول نقوم بتبسيط العلاقة وبضربها بالمجهول.

∴ نجد قيم  $c, d \in \mathbb{R}$  من العلاقة أولاً.

$$c + di = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}$$

$$c + di = \frac{14 - 7i - 8i - 4}{(2)^2 + (1)^2} = \frac{10 - 15i}{5}$$

$$C + di = 2 - 3i \quad \begin{matrix} C = 2 \\ d = -3 \end{matrix}$$

$$\sqrt{2c - di} = \sqrt{2(2) - (-3)i}$$

$$\sqrt{4 + 3i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$4 + 3i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \dots\dots(1)$$

$$\left[\frac{2xy}{2x} = \frac{3}{2x}\right] \div 2x \Rightarrow y = \frac{3}{2x} \quad \dots\dots(2)$$

نعويض

$$x^2 - y^2 = 4$$

سؤال 3 جد الجذور التربيعيات للعدد  
(-1+7i)(1+i) المركب (2010-د 2)

نضع العدد بصيغة (a+bi)

ملاحظة

$$-1-i+7i-7=-8+6i$$

$$\sqrt{-8+6i}=x+yi \text{ بالتربيع}$$

$$-8+6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=-8 \dots\dots(1)$$

$$[2xy=6] \div 2x \Rightarrow y=\frac{3}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2-y^2=-8$$

$$x^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2=-8 \Rightarrow \left[x^2-\frac{9}{x^2}=-8\right] \cdot x^2$$

$$x^4-9=-8x^2 \Rightarrow x^4+8x^2-9=0 \text{ تجربة}$$

$$(x^2+9)(x^2-1)=0$$

$$\underline{\text{أما}} \ x^2+9=0 \text{ يُهمل} \notin R$$

$$\underline{\text{أو}} \ x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \text{ بالجزر } x=\pm 1$$

$$y=\frac{3}{x}=\frac{3}{\pm 1}=\pm 3$$

$$C=\mp(1+3i)$$

$$C_1=1+3i$$

$$C_2=-1-3i$$

سؤال 2 جد الجذور التربيعيات للعدد  
 $\frac{14+2i}{1+i}$  المركب (2004-د 2)

يجب وضع العدد بصيغة (a+bi)

ملاحظة

$$\frac{14+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{14-14i+2i+2}{(1)^2+(1)^2}$$

$$\frac{16-12i}{2}=8-6i$$

$$\sqrt{8-6i}=x+yi \text{ بالتربيع}$$

$$8-6i=(x^2-y^2)+2xyi$$

$$x^2-y^2=8 \dots\dots(1) \ , \ 2xy=-6 \div 2x$$

$$y=\frac{-3}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2-\left(\frac{-3}{x}\right)^2=8$$

$$\left[x^2-\frac{9}{x^2}=8\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4-9=8x^2$$

$$x^4-8x^2-9=0$$

$$(x^2-9)(x^2+1)=0$$

$$\underline{\text{أما}} \ x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \text{ بالجزر } x=\pm 3$$

$$\underline{\text{أو}} \ x^2+1=0 \Rightarrow \text{ يُهمل} \notin R$$

$$y=\frac{-3}{x}=\frac{-3}{\pm 3}=\pm 1$$

$$C=\mp(3-i)$$

$$C_1=3-i$$

$$C_2=-3+i$$



## تكوين المعادلة التربيعية إذا علم جذرها

عندما يطلب معادلة تربيعية ويعطي جذري المعادلة:

1 يجب وضع الجذرين بصورة  $a+bi$

2 نجد مجموع الجذرين وحاصل ضرب الجذرين.

3 نطبق العلاقة التالية:

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0 \quad (\text{صيغة قياسية})$$

\* عندما يقول في السؤال ان المعادلة ذات معاملات حقيقية هذا يعني ان الجذران مترافقان.

مثال 3 كَوْن المعادلة التربيعية التي

$$m = \frac{3-i}{1+i}, L = (3-2i)^2 \text{ جذرها}$$

\* يجب تبسيط الجذور أولاً

$$m = \frac{3-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-i-1}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$m = \frac{2-4i}{2} \Rightarrow m = 1-2i$$

$$L = (3-2i)^2 = 9-12i-4$$

$$L = 5-12i$$

$$m+L = (1-2i) + (5-12i) \text{ مجموع الجذرين} \\ = 6-14i$$

$$m \cdot L = (1-2i)(5-12i) \\ = 5-12i-10i-24 = -19-22i$$

$$x^2 - (6-14i)x + (-19-22i) = 0$$

مثال 1 كَوْن المعادلة التربيعية التي

$$m = 1-i, L = 1+2i \text{ حيث}$$

$$m+L = (1-i) + (1+2i)$$

$$\text{مجموع الجذرين} = 2+i$$

$$m \cdot L = (1-i)(1+2i)$$

$$\text{ضرب الجذرين} = 1+2i-i+2 \\ = 3+i$$

$$x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$$

مثال 2 كَوْن المعادلة التربيعية التي

$$\bar{m} = 2+2i \text{ جذرها}$$

$$m = 2+2i, L = -2-2i$$

$$m+L = (2+2i) + (-2-2i) = 0$$

$$m \cdot L = (2+2i)(-2-2i) \\ = -4-4i-4i-4 = -8i$$

$$x^2 - (0)x + (-8i) = 0$$

$$x^2 - 8i = 0$$

مثال 4

كّون المعادلة التربيعية ذات  
العاملات الحقيقية والتي احد  
جذورها  $\frac{\sqrt{3}+3i}{4}$ .

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$$

$$m+L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$m.L = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{4} = 0$$



موقع طلاب العراق

1

مثال

كّون المعادلة التربيعية ذات  
العاملات الحقيقية والتي احد  
جذورها  $i$ .

((العاملات حقيقية أي ان  
الجزران مترافقان)).  
 $m=i$   
 $L=-i$

$$m+L = (i) + (-i) = 0$$

$$m.L = (i)(-i) = -i^2 = 1$$

$$x^2 - (0)x + 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

2

مثال

كّون المعادلة التربيعية ذات  
العاملات الحقيقية والتي احد  
جذورها  $(3-4i)$ .

((مترافقان))  $m=3-4i$  ,  $L=3+4i$

$$m+L = (3-4i) + (3+4i) = 6$$

$$m.L = (3-4i)(3+4i) = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

3

مثال

كّون المعادلة التربيعية ذات  
العاملات الحقيقية والتي احد  
جذورها  $(5-i)$ .

$$m+L = (5-i) + (5+i) = 10$$

$$m.L = (5-i)(5+i) = (5)^2 + (1)^2 = 25 + 1 = 26$$

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$



## أسئلة مختلفة ذات صلة

إذا كان  $(2+4i)$  هو أحد جذري

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

معاملاتها حقيقية، جد  $b, c \in \mathbb{R}$

$$2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$$

(2015 - د 2)

$$[2x^2 - x(1+b) + (c-6) = 0] \div 2$$

← عامل مشترك

$$x^2 - x\left(\frac{1+b}{2}\right) + \left(\frac{c-6}{2}\right) = 0$$

حاصل ضرب الجذور

الجذور مترافقان لأن المعاملات حقيقية

$$(2-4i) + (2+4i) = \frac{1+b}{2}$$

مجموع الجذور

$$4 = \frac{1+b}{2} \Rightarrow 1+b = 8$$

$$b = 8 - 1$$

$$b = 7$$

$$(2-4i)(2+4i) = \frac{c-6}{2}$$

حاصل ضرب الجذور

$$(2)^2 + (4)^2 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow 4+16 = \frac{c-6}{2}$$

$$20 = \frac{c-6}{2} \Rightarrow c-6 = 40$$

$$c = 40 + 6$$

$$c = 46$$

\* إذا أعطى في السؤال معادلة تربيعية تحويل مجاهيل نتبع الخطوات التالية:

**أولاً:** نضع المعادلة بالشكل القياسي حيث الطرف الايمن = 0 ثم نجعلها بالصيغة التالية:

$$0 = (\text{حاصل ضرب الجذور}) + x - (\text{مجموع الجذور}) - x^2$$

**ثانياً:** إذا وجد أكثر من حد فيه  $x$  نسحب الـ  $x$  عامل مشترك ويسحب بإشارة سالبة لأن الشكل القياسي فيه معامل  $x$  سالب

**ثالثاً:** نقسم على معامل  $x^2$  دائماً لجعله = 1

**رابعاً:** نحدد مجموع الجذور وحاصل ضرب الجذور.

**خامساً:** إذا كان في المعادلة مجهول واحد فقط نحاول البدء بالجزء المعلوم كلياً.

(حاصل الضرب أو حاصل الجمع)

كما في السؤال (2)

أحد الجذرين ثلاثة أمثال الآخر  $m = 3L$

$$m + L = (4 - 12i)$$

$$3L + L = 4 - 12i$$

$$[4L = 4 - 12i] \div 4 \Rightarrow L = 1 - 3i$$

$$m = 3(1 - 3i)$$

$$m = 3 - 9i$$

لأن  $k$  يمثل حاصل ضرب الجذرين  $K = m \cdot L \Rightarrow$

$$K = (3 - 9i)(1 - 3i)$$

$$K = 3 - 9i - 9i - 27$$

$$K = -24 - 18i$$

سؤال 4 إذا كان  $(2 + i)$  يمثل أحد جذري

المعادلة  $x^2 - 4ix + a = 0$  جد الجذر

الآخر. ثم جد قيمة  $a$ .

$$x^2 - 4ix + a = 0 \Rightarrow x^2 - (4i)x + a = 0$$

$$m + L = +4i$$

$$2 + i + L = 4i \Rightarrow L = -2 + 4i - i$$

$$L = -2 + 3i \text{ الجذر الآخر}$$

$a =$  حاصل ضرب الجذرين

$$a = m \cdot L$$

$$a = (2 + i)(-2 + 3i)$$

$$a = -4 + 6i - 2i - 3$$

$$a = -7 + 4i$$

سؤال 2 إذا كان  $(3 + i)$  هو أحد جذري

المعادلة  $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$  فما قيمة

$a \in \mathbb{C}$  وما قيمة الجذر الآخر؟ (الكتاب)

نبدأ بالجزء الكامل وهو حاصل ضرب الجذرين

$$m \cdot L = 5 + 5i \Rightarrow (3 + i)(L) = 5 + 5i$$

$$L = \frac{5 + 5i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{15 - 5i + 15i + 5}{9 + 1}$$

$$L = \frac{20 + 10i}{10} = \frac{20}{10} + \frac{10}{10}i$$

$$L = 2 + i$$

الآن نجد قيمة  $a$  وهي تمثل مجموع الجذرين

$$a = m + L$$

$$a = (3 + i) + (2 + i)$$

$$a = 5 + 2i$$

سؤال 3 إذا كان أحد جذري المعادلة

$x^2 + K = 4x - 12ix$  هو ثلاث أمثال الآخر جد الجذرات وما قيمة  $K$ ؟

$$x^2 + K = 4x - 12ix$$

$$x^2 - 4x + 12ix + K = 0$$

$$x^2 - x(4 - 12i) + K = 0$$

مجموع الجذرين



## حل المعادلة التربيعية في

\* يتم حل المعادلة من الشكل  $ax^2 + bx + c = 0$  باستخدام قانون الدستور.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث:  $x^2$  معامل = a

x معامل = b

c = الحد المطلق ((بدون x))

مثال 2 جد مجموعة حل المعادلة:

$$2Z^2 - 5Z + 13 = 0$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -5 \\ c &= 13 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(13)}}{2(2)}$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{79}i}{4}$$

أما  $Z = \frac{5 + \sqrt{79}i}{4}$

أو  $Z = \frac{5 - \sqrt{79}i}{4}$

مثال 1 جد مجموعة حل المعادلة الآتية في

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 4 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

أما  $x = \frac{-4 + 2i}{2} \Rightarrow x = -2 + i$

أو  $x = \frac{-4 - 2i}{2} \Rightarrow x = -2 - i$

مثال 4 جد مجموعة حل المعادلة:

$$Z^2 - 3Z + 3 + i = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 3 + i$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3+i)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}$$

$$\sqrt{-3 - 4i} = x + yi \quad \text{بالتربيع}$$

$$-3 - 4i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = -3 \quad \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -4] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \quad \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = -3 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = -3$$

$$\left[x^2 - \frac{4}{x^2} = -3\right] \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 4 = -3x^2$$

$$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{أما } x^2 + 4 = 0 \text{ يُهمل } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \frac{-2}{x} = \frac{-2}{\pm 1} = \pm 2 \Rightarrow \pm(1 - 2i)$$

$$Z = \frac{3 \pm (1 - 2i)}{2} \begin{cases} Z = \frac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i \\ Z = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = 1 + i \end{cases}$$

مثال 3 حل المعادلة في ج

$$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = 2i$$

$$c = 3$$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{2i \pm \sqrt{4i^2 - 12}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \pm \sqrt{-4 - 12}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$Z = \frac{2i \pm 4i}{2}$$

$$\text{أما } Z = \frac{2i + 4i}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

$$\text{أو } Z = \frac{2i - 4i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

\* إذا كان الجذر  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  يحوي (i) نأخذ الجذر ونجده بطريقة الفرضية أما إذا كان الجذر  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  فقط عدد سالب لا نستخدم الفرضية.

مثال (3) ومثال (1) و (2) كان بدون i فقط عدد سالب لا يوجد فرضية.

أنظر مثال (4) الجذر فيه (i) بالداخل نستخدم الفرضية.





مثال 5 جد مجموعة حل المعادلة:

$$x^2 - \left(\frac{-4}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] \cdot x^2$$

$$x^4 - 16 = 0$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

أما  $x^2 + 4 = 0$  يُهمل  $\notin \mathbb{R}$

أو  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$  بالجزر

$$x = \pm 2$$

$$y = \frac{-4}{x} = \frac{-4}{\pm 2} = \pm 2$$

$$\sqrt{-8i} = \pm(2 - 2i)$$

$$Z = \frac{-2 \mp (2 - 2i)}{2}$$

أما  $Z = \frac{-\cancel{2} + \cancel{2} - 2i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$

أو  $Z = \frac{-2 - 2 + 2i}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$

$$Z^2 + 2Z + i(2 - i) = 0$$

$$Z^2 + 2Z + 2i - i^2 = 0$$

$$a = 1$$

$$Z^2 + 2Z + (1 + 2i) = 0$$

$$b = 2$$

$$c = 1 + 2i$$

$$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$Z = \frac{-(2) \mp \sqrt{(2)^2 - 4(1)[1 + 2i]}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4 - 8i}}{2}$$

$$Z = \frac{-2 \mp \sqrt{-8i}}{2}$$

هنا نعوض

(( نجد  $\sqrt{-8i}$  كما فعلنا سابقاً )) لأن في الجذر  $i$

$$\sqrt{0 - 8i} = x + yi$$

$$0 - 8i = (x^2 - y^2) + 2xyi$$

$$x^2 - y^2 = 0 \dots\dots(1)$$

$$[2xy = -8] \div 2x \Rightarrow y = \frac{-4}{x} \dots\dots(2)$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

ملاحظة

إذا أعطى المعادلة بطريقة مجموع مربعين نحلل كما تعلمنا طريقة تحليل مجموع مربعين .

مثال حل المعادلة  $Z^2 = -12$

بالجذر  $Z^2 = -12$

$$Z^2 = -12$$

$$Z = \sqrt{-12}$$

$$Z = \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}$$

$$Z = \sqrt{12}i \Rightarrow Z = \pm 2\sqrt{3}i$$

مثال حل المعادلة  $4Z^2 + 25 = 0$

نضرب  $(-i^2)$

$$4Z^2 - 25i^2 = 0$$

$$(2Z - 5i)(2Z + 5i) = 0$$

أما  $2Z + 5i = 0 \Rightarrow [2Z = -5i] \div 2$

$$Z = \frac{-5}{2}i$$

أو  $2Z - 5i = 0 \Rightarrow [2Z = 5i] \div 2$

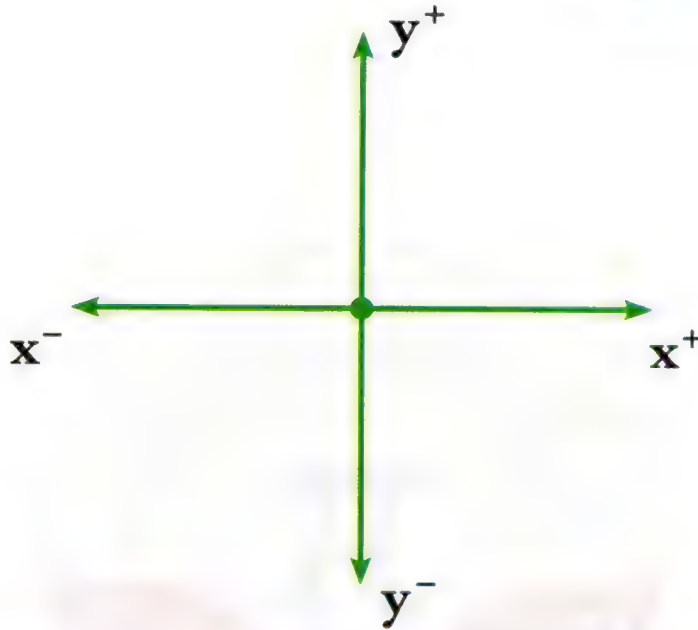
$$Z = \frac{5}{2}i$$



## التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب  $a + bi$  يمكن كتابته بشكل زوج مرتب  $P(a, b)$

\* مراجعة المستوي الاحداثي:



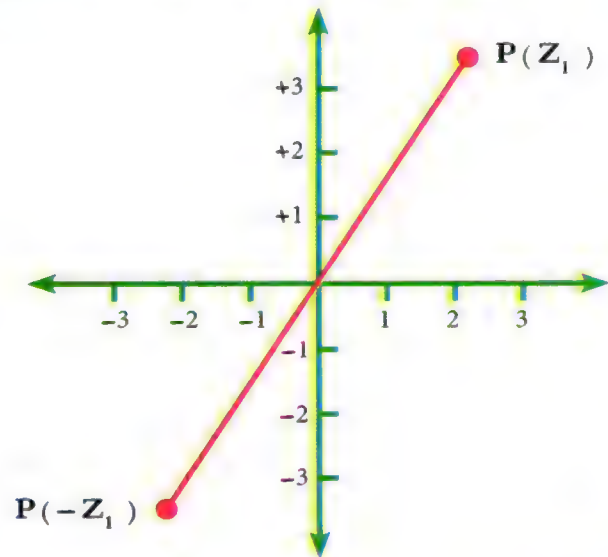
أكتب النظير الجمعي لكل من الأعداد التالية ثم مثل هذه الأعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند:

مثال 1

1  $Z_1 = 2 + 3i \rightarrow (2, 3)$

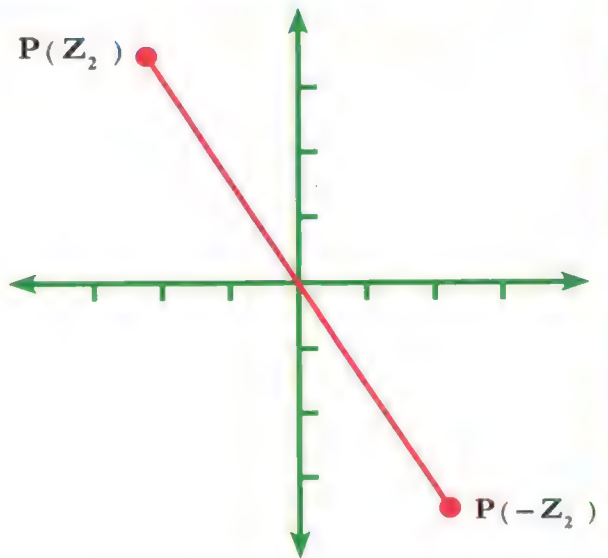
$-Z_1 = -2 - 3i \rightarrow (-2, -3)$

\* ((النظير نقلب اشارة العدد كله))



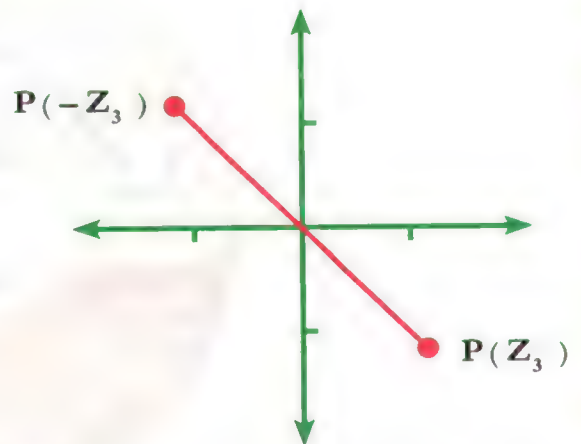
2  $Z_2 = -1 + 3i \rightarrow (-1, 3)$

$-Z_2 = +1 - 3i \rightarrow (1, -3)$



3  $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

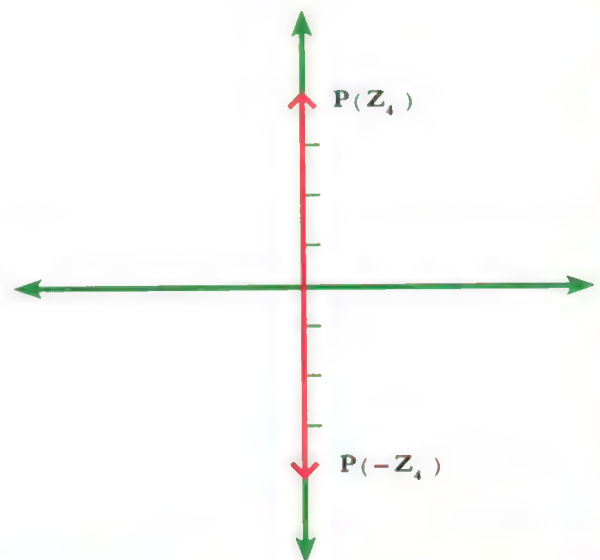
$-Z_3 = -1 + i \rightarrow (-1, 1)$



4  $Z_4 = 4i$

$Z_4 = 0 - 4i \rightarrow (0, -1)$

$-Z_4 = 0 - 4i \rightarrow (0, -4)$



زوروا موقعنا للمزيد

WWW.IQ-RES.COM





مثال 2

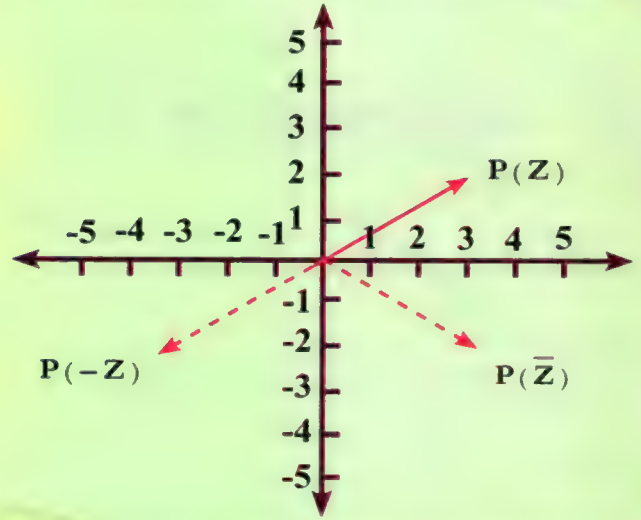
إذا كان  $(Z = 4 + 2i)$  فوضح على شكل ارجاند كلاً من:

$Z, \bar{Z}, -Z$

$Z = 4 + 2i \rightarrow (4, 2)$

$\bar{Z} = 4 - 2i \rightarrow (4, -2)$

$-Z = -4 - 2i \rightarrow (-4, -2)$

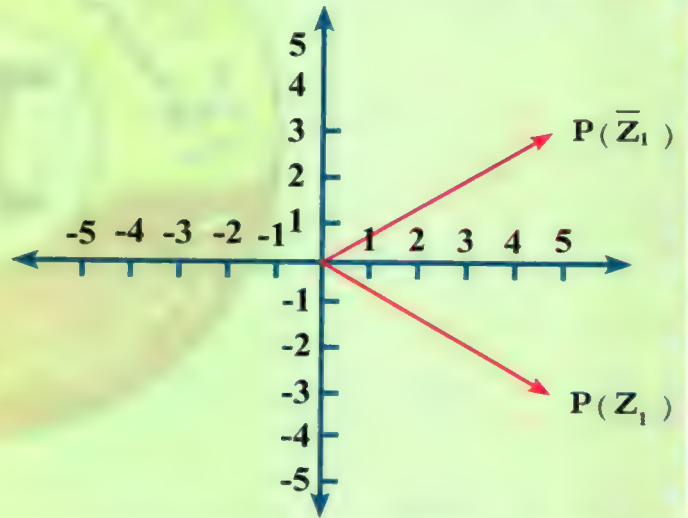


مثال 3

اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الآتية ثم مثلها على شكل ارجاند:

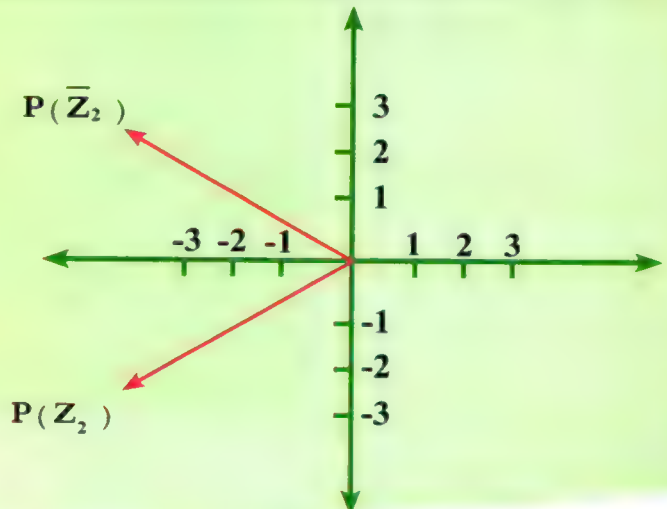
1  $Z_1 = 5 + 3i \rightarrow (5, 3)$

$\bar{Z}_1 = 5 - 3i \rightarrow (5, -3)$



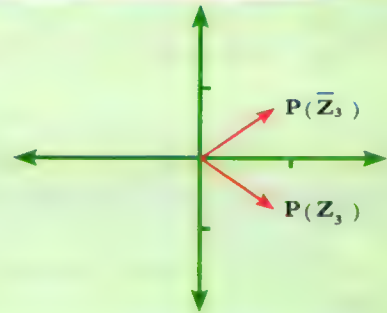
2  $Z_2 = -3 + 2i \rightarrow (-3, 2)$

$\bar{Z}_2 = -3 - 2i \rightarrow (-3, -2)$



2  $Z_3 = 1 - i \rightarrow (1, -1)$

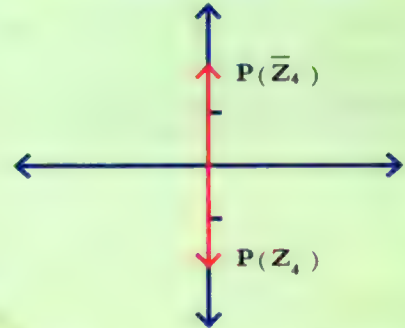
$\bar{Z}_3 = 1 + i \rightarrow (1, 1)$



3  $Z_4 = -2i$

$Z_4 = 0 - 2i \rightarrow (0, -2)$

$\bar{Z}_4 = 0 + 2i \rightarrow (0, 2)$



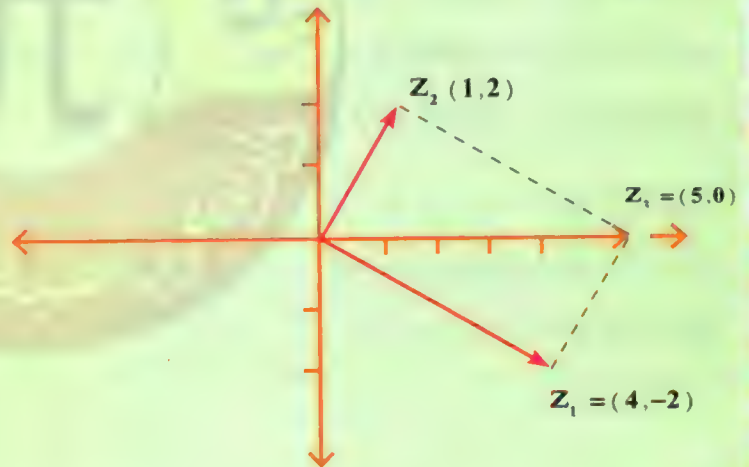
مثال 4 إذا كانت  $Z_1 = 4 - 2i$  و  $Z_2 = 1 + 2i$  مثل على شكل ارجاند  $Z_1 + Z_2$ .

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (4 - 2i) + (1 + 2i) \\ &= (4 + 1) + (-2 + 2i) \\ &= 5 + 0i \end{aligned}$$

$Z_1 = 4 - 2i \rightarrow (4, -2)$

$Z_2 = 1 + 2i \rightarrow (1, 2)$

$Z_3 = 5 + 0i \rightarrow (5, 0)$



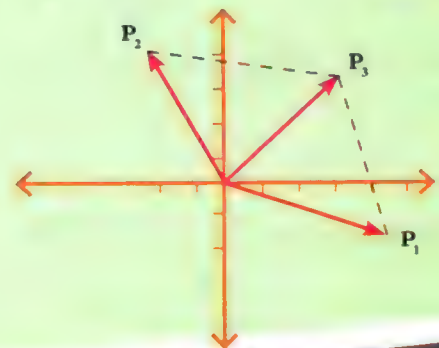
مثال 5 إذا كانت  $Z_1 = 6 - 2i$  و  $Z_2 = 2 - 5i$  مثل على شكل ارجاند  $Z_1 - Z_2$ .

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= (6 - 2i) - (2 - 5i) \\ &= (6 - 2i) + (-2 + 5i) = 4 + 3i \end{aligned}$$

$P_1(Z_1) = P_1(6, -2)$

$P_2(Z_2) = P_2(-2, 5)$

$P_3(Z_3) = P_3(4, 3)$





مراجعة

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$0^\circ$	0	1
$2\pi = 360^\circ$	0	1
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	1	0
$\pi = 180^\circ$	0	-1

$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	-1	0
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

إيجاد قيم  $(\cos \theta - \sin \theta)$  لبعض الزوايا

أولاً:  $n\pi$    
 $n$  فردي نعتبر الزاوية  $\pi$    
 $n$  زوجي نعتبر الزاوية صفر

$$\sin 20\pi = \sin 0 = 0$$

$$\cos 22\pi = \cos 0 = 1$$

$$\sin 10\pi = \sin 0 = 0$$

$$\cos 13\pi = \cos \pi = -1$$

$$\cos 15\pi = \cos \pi = -1$$

$$\sin 55\pi = \sin \pi = 0$$

((  $n$  عدد زوجي اعتبرنا الزاوية صفر ))

((  $n$  فردي اعتبرنا الزاوية  $\pi$  ))

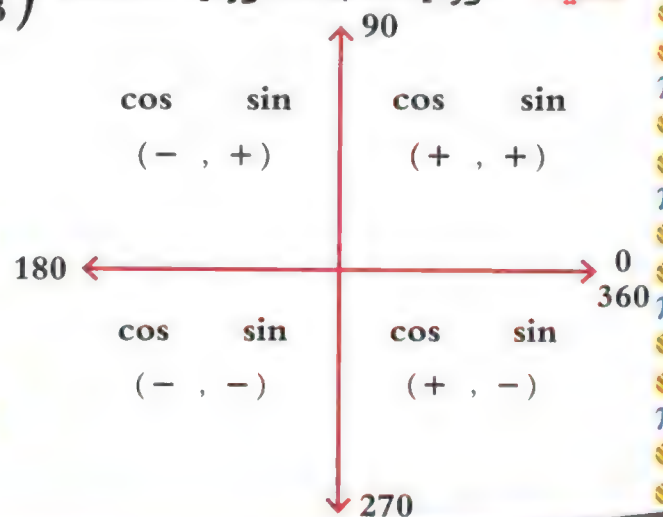
ثانياً: الزوايا التابعة للزوايا الخاصة  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$  :

مثلاً:  $\frac{5\pi}{6}$  ،  $\frac{3\pi}{4}$  ،  $\frac{5\pi}{4}$  ... الخ.

(1) نهمل العدد في البسط ونأخذ الزاوية الخاصة

فقط  $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$  ونجد  $\frac{\sin}{\cos}$

(2) نضرب العدد  $\times$  الزاوية ونحدد الربع ونضع الاشارات.



جد:  $\cos \frac{5\pi}{6}$

مثال

نهمل الـ (5) ونجد  $\cos \frac{\pi}{6}$  وهو  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  من الجدول

الآن نضرب  $150 = 5 \times 30$  وهي في الربع الثاني الـ  $\cos$  سالب  $\leftarrow \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\downarrow$   
 $\frac{\pi}{6}$

جد:  $\sin \frac{7\pi}{4}$

مثال

نهمل الـ (7) ونجد  $\frac{\pi}{4}$  وهو  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  من الجدول

الآن نضرب  $315 = 7 \times 45$  وهي في الربع الرابع الـ  $(\sin)$  سالب  $\leftarrow \sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\downarrow$   
 $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

**ثالثاً:** إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام نقسم البسط على المقام ويجب ان يكون الناتج زوجي وسوف اوضح الطريقة في المثال.

3  $\sin \frac{47\pi}{4}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4 \overline{) 47} \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 07 \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 3 \end{array}$$

لأن الناتج فردي نعيد القسمة ونجعل الناتج زوجي (دائماً)

$\sin \frac{47\pi}{4}$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 4 \overline{) 47} \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 7 \end{array}$$

$\sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  (نفس الطريقة أعلاه)

1  $\cos \frac{49\pi}{4}$

$$\begin{array}{r} 12 \\ 4 \overline{) 49} \\ \underline{4} \phantom{0} \\ 09 \\ \underline{8} \phantom{0} \\ 1 \end{array}$$

نضع الباقي في البسط  $\cos \frac{1\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2  $\sin \frac{37\pi}{6}$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \overline{) 37} \\ \underline{36} \phantom{0} \\ 1 \end{array}$$

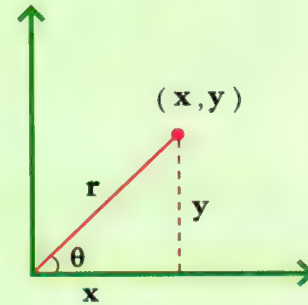
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



## المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب

**أولاً:** إذا طلب المقياس والسعة للعدد المركب  $Z = x + yi$   
 $Z = (x, y)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$



يرمز للمقياس بالرمز  $r$  أو  $\|Z\|$  ويُقرأ  $\text{Mod}(Z)$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$\dots\dots\dots (2)$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

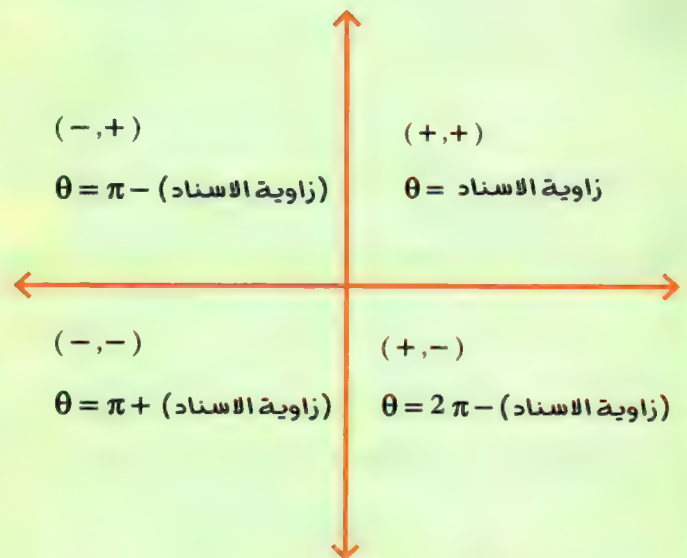
$\dots\dots\dots (3)$

نجد زاوية الاسناد من  
 قيم  $\sin \theta$  أو  $\cos \theta$   
 ((ونحدد الربع))

ويرمز للسعة بالرمز  $\theta$   
 وتكتب  $\text{org}(Z)$  أو  $\theta$

\* يجب وضع العدد المركب بصيغة  
 $a + bi$  أي الصيغة العددية للعدد  
 المركب ثم نبدأ بتطبيق القوانين اعلاه  
 (1) و (2) و (3).

$x$  ← يمثل الجزء الحقيقي مع الإشارة  
 $y$  ← يمثل الجزء التخيلي ويُعوض  
 بدون الـ  $(i)$  انتبه الى ذلك جيداً.



**مثال 3** إذا كان  $Z = -1 - i$  فجد المقياس والقيمة الاساسية لـ  $Z$ .

$$Z = -1 - i \rightarrow Z = \left( \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right) \text{ الربع الثالث}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1}$$

$$r = \sqrt{2} \text{ (المقياس)}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد هي  $\frac{\pi}{4}$  في الربع الثالث

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ السعة}$$

**مثال 1** إذا كان  $Z = 1 + \sqrt{3}i$  فجد المقياس والقيمة الاساسية لـ  $Z$ .

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow Z = \left( \begin{matrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{matrix} \right) \text{ الربع الأول}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$\therefore r = 2 \text{ (المقياس)}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد هي  $\frac{\pi}{3}$  في الربع الأول

$$\theta = \text{زاوية الأسناد} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ السعة}$$

**مثال 2** جد مقياس وسعة العدد المركب  $-2 + 2i$

$$-2 + 2i \Rightarrow \left( \begin{matrix} -2 \\ 2 \end{matrix} \right) \text{ الربع الثاني}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \text{ (المقياس)}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد هي  $\frac{\pi}{4}$  في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ السعة}$$

قانون الربع الثاني





**ثانياً:** إذا أعطى المقياس والقيمة الأساسية للسعة ويطلب العدد المركب:

\* إذا لم يعطى زاوية خاصة فراجع طريقة إيجاد قيم  $\cos \theta$  و  $\sin \theta$  الواردة في (صفحة 53).

$$x = r \cos \theta$$

$$Z = x + yi \quad \text{حيث}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$Z = \text{الجزء الحقيقي} + \text{الجزء التخيلي} (i)$$

**مثال 2**

إذا كان مقياس عدد مركب = 4

والقيمة الأساسية للسعة  $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$  جد العدد

بصورة  $a + bi$

$$r = 4, \quad \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 4 \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$x = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \quad \text{الجزء الحقيقي}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 4 \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$y = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -2 \quad \text{الجزء التخيلي}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z = \text{الجزء الحقيقي} + \text{الجزء التخيلي} (i)$$

$$Z = 2\sqrt{3} - 2i$$

**مثال 1**

عدد مركب مقياسه  $(2\sqrt{2})$

والقيمة الأساسية للسعة  $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$  جد العدد

بصورة  $a + bi$

$$r = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = -2 \quad \text{الجزء الحقيقي}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 2 \quad \text{الجزء التخيلي}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z = \text{الجزء الحقيقي} + \text{الجزء التخيلي} (i)$$

$$Z = -2 + 2i$$

**فكرة إثرائية:** يمكن ربط هذه الحالة مع موضوع تكوين المعادلة التربيعية وكما في الأمثلة

الآتية:

**مثال 2** إذا علمت ان  $Z = -1 + hi$  عدد مركب القيمة الاساسية لسعته  $\frac{3\pi}{4}$  جد قيمة (h) ثم كون المعادلة التربيعية التي جذورها الأول Z والثاني ضعف الأول.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ h \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1, y = h$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos \theta} = \frac{-1}{\cos \frac{3\pi}{4}}$$

$$r = \frac{-1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = 1, h = 1$$

$$Z_1 = -1 + i \text{ الجذر الأول}$$

$$Z_2 = 2Z_1 \text{ الجذر الثاني ضعف الأول}$$

$$Z_2 = -2 + 2i$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع الجذرين} &= (-1 + i) + (-2 + 2i) \\ &= -3 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل ضرب الجذرين} &= (-1 + i)(-2 + 2i) \\ &= 2 - 2i - 2i - 2 \\ &= -4i \end{aligned}$$

$$x^2 - (-3 + 3i)x + (-4i) = 0$$

**مثال 1** كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذورها مقياسه (2) وسعته الاساسية  $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

**ملاحظة** يجب أن نجد العدد المركب وهو أحد جذور المعادلة أما الجذر الآخر فهو مرافقة لأن المعادلة ذات معاملات حقيقية.

$$x = r \cos \theta$$

$$x = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x = 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = 1$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$y = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$Z = x + yi \Rightarrow Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 1 + \sqrt{3}i \text{ الجذر الآخر}$$

$$\begin{aligned} \text{مجموع الجذرين} &= (1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{حاصل ضرب الجذرين} &= (1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) \\ &= (1)^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$



**الصيغة القطبية:** هناك صيغة أخرى للعدد المركب وهي الصيغة القطبية والتي تكتب بالشكل:

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

السعة  $\theta$  ، القياس  $r$

**مثال 2** ضع العدد  $2\sqrt{3} - 2i$  بالصيغة القطبية.

$$2\sqrt{3} - 2i \rightarrow (2\sqrt{3}, -2) \quad \text{((الربع الرابع))} \\ (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \frac{\pi}{6} \end{array} \right]$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{ربع رابع} \end{array} \right]$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow[\text{مقام}]{\text{توحيد}} \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$$

**مثال 1** غبر عن العدد المركب  $-2 + 2i$  بالصيغة القطبية.

$$-2 + 2i \rightarrow (-2, 2) \quad \text{((الربع الثاني))} \\ (x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$$

$$r = 2\sqrt{2} \quad (\text{القياس})$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \frac{\pi}{4} \end{array} \right]$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[ \begin{array}{l} \text{الربع الثاني} \end{array} \right]$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{مقام}]{\text{توحيد}} \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

## مبرهنة دي موافر

**أولاً:** إذا كان لدينا  $(a + bi)^n$  حيث  $n$  عدد صحيح (ليس كسراً).

$$Z^n = r^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n \Rightarrow Z^n = r^n [\cos(\theta \cdot n) + i \sin(\theta \cdot n)]$$

إذا كان  $n$  عدد صحيح سالب تصبح العلاقة:

$$Z^{-n} = r^{-n} [\cos(\theta \cdot n) - i \sin(\theta \cdot n)]$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

أي أن السالب الذي مع الزاوية يُهمل مع دالة  $\cos$  ويتم وضعه قبل دالة  $\sin$

ملاحظة

لحل سؤال دي موافر وكان الأس عدد صحيح يجب توفير ثلاث اركان وهي القياس،  $\theta$  السعة،  $n$  وهو اس القوس وقد تعلمت سابقاً كيف تجد  $r$  و  $\theta$ . ثم تطبق قانون مبرهنة دي موافر أعلاه.

ملاحظة

**الجزء الأول من الموضوع:** يعطي صيغة قطبية جاهزة ما عليك سوى ضرب (الأس  $\times$  الزاوية) كما في الأمثلة التالية:

أحسب:

مثال 1

$$(3) \left[ \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right]^{-3}$$

$$= \cos \left( \frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right)$$

$$= \cos \frac{-7\pi}{4} + i \sin \left( \frac{-7\pi}{4} \right)$$

انتبه! السالب يهمل مع  $\cos$  ويتم وضع السالب قبل  $\sin$

$$= \cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$(1) \left[ \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right]^4$$

$$= \cos \left( \frac{3\pi}{8} \cdot 4 \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{8} \cdot 4 \right)$$

$$= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + i(-1) \Rightarrow 0 - i$$

$$(2) \left[ \cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right]^4$$

$$= \cos \left( \frac{5\pi}{24} \cdot 4 \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{24} \cdot 4 \right)$$

$$= \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$





مثال 3

أحسب باستخدام دي موافر  $(1+i)^{11}$

$$1+i \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{x,y} \quad ((\text{الربع الأول}))$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{الركن الأول } (r))$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{زاوية الأسناد} \\ \frac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{الربع الأول} \end{array} \right\}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \begin{array}{l} \text{الركن الثاني} \\ \text{الركن الثالث } n=11 \end{array}$$

قانون دي موافر  $Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{11} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^{11} \quad \text{تعويض}$$

$$\begin{aligned} Z^{11} &= 32 \sqrt{2} \left( \cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ضرب} \\ \text{الاس} \\ \text{في الزاوية} \end{array} \\ &= 32 \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \begin{array}{l} \text{تبسيط} \\ \text{الزاوية} \end{array} \\ &= 32 \sqrt{2} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = -32 + 32i \quad \text{الناتج} \end{aligned}$$

توضيح:

$$\frac{11\pi}{4} \quad \begin{array}{l} 4 \overline{) 11} \\ \underline{8} \\ 3 \end{array} \rightarrow \frac{3\pi}{4}$$

مثال 2

بسّط ما يلي:

$$1 \quad \frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)^3}$$

\* لا يمكن ان نطرح الاسس ((عند القسمة نطرح الاسس)) لأن الاقواس مختلفة. لذلك سوف نضرب العدد الذي بجانب  $\theta$  بأس القوس ((عكس العملية بالضبط)).

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^9} = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$2 \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta - i \sin \theta)^4$$

$$\cos \theta - i \sin \theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} \quad \text{"توضيح"}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^8 (\cos \theta + i \sin \theta)^{-4}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

حل آخر:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 \left[ (\cos \theta + i \sin \theta)^4 (\cos \theta - i \sin \theta)^2 \right]$$

متراكبات

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 \left[ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right]^4$$

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 = 1 \quad (\text{تخيلي})^2 + (\text{حقيقي})^2$$

$$\cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

مثال 5 أحسب باستخدام دي موافر  $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

الربع الأول  $\sqrt{3}+i \rightarrow \left(\sqrt{3}, 1\right)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$

$r = 2$

زاوية الأسناد  $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$   $\frac{\pi}{6}$    
 الربع الأول

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$   $\theta = \frac{\pi}{6}$

$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$

$Z^{-9} = (2)^{-9} \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^{-9}$

$= \frac{1}{2^9} \left[ \cos \frac{-9\pi}{6} + i \sin \frac{-9\pi}{6} \right]$    
 (يُخرج قبل sin)

$= \frac{1}{512} \left( \cos \frac{3\pi}{2} - i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$    
 تذكر  $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

$= \frac{1}{512} (0 - (-1)i)$

$= 0 + \frac{1}{512}i$



مثال 4 أحسب باستخدام دي موافر  $(1-i)^7$

الربع الرابع  $1-i \rightarrow \left(1, -1\right)$    
 x y

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$    
 الركن الأول (r)

$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \rightarrow r = \sqrt{2}$

الركن الثاني السعة (θ)

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$    
 زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{4}$

$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$    
 الربع الرابع

$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$

الركن الثالث n=7

$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$    
 قانون دي موافر

$Z^7 = (\sqrt{2})^7 \left[ \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right]^7$    
 تعويض

$Z^7 = 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{49\pi}{4} + i \sin \frac{49\pi}{4} \right)$    
 الاس  $\times$    
 الزاوية

$= 8\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$    
 تبسيط   
 الزاوية

$= 8\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$    
 الناتج

$= 8 + 8i$



## نتيجة مبرهنة دي موافر

عندما يكون اس القوس كسر وبشكل  $(\frac{1}{n})$  أي ان الكسر بسطه  $= 1$  يكون السؤال نتيجة دي موافر .

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

\* ولحل سؤال النتيجة توفير أربع اركان وهي :

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  , مقام الاس  $n =$  , السعة  $\theta =$  , المقياس  $r =$

**ملاحظة** عندما يطلب (الجذور التربيعية - التكعيبية - الجذور الاربعة ... الخ) لعدد مركب غير مرفوع الى اس يعني نتيجة والاس كسر ولا يعطي قوس في هذه الحالة انت عليك التمييز :

$k$  نقت قبل الـ  $n$  برقم كما  
تلاحظ الامثلة التوضيحية

معناها جذور تربيعية  $\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{2}} \rightarrow n = 2, k = 0, 1$

معناها جذور تكعيبية  $\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{3}} \rightarrow n = 3, k = 0, 1, 2$

معناها جذور الأربعة  $\Rightarrow (a + bi)^{\frac{1}{4}} \rightarrow n = 4, k = 0, 1, 2, 3$

\* إذا كان العدد المركب مرفوع الى اس كسر ولكن (البسط  $\neq 1$ ) للأس فيكون السؤال (مبرهنة ونتيجة) .

$$\begin{aligned} \text{مثلا } (a + bi)^{\frac{3}{2}} &= \left[ (a + bi)^3 \right]^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (a + bi)^3 \\ \left( \frac{1}{2} \text{ ناتج المبرهنة} \right) \end{cases} \\ \text{مثلا } (a + bi)^{\frac{-5}{2}} &= \left[ (a + bi)^{-5} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{cases} (a + bi)^{-5} \\ \left( \frac{1}{2} \text{ الناتج} \right) \end{cases} \\ \text{مثلا } (a + bi)^{\frac{2}{3}} &= \left[ (a + bi)^2 \right]^{\frac{1}{3}} \begin{cases} (a + bi)^2 \text{ مبرهنة} \\ \left( \frac{1}{3} \text{ الناتج} \right) \text{ نتيجة} \end{cases} \end{aligned}$$

### انتبه !

ضع اشارة السالب مع القوس الداخلي (مع المبرهنة) مهما كان موقع السالب في الأس .

\* عند قراءة الملاحظة الاخيرة انظر الى سؤال 2017 دور أول فيه شرح مفصل لهذه الحالة (سؤال 20) في الاسئلة الوزارية .

$$k=1 \quad \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} = \frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{2} = \frac{8\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

جد الجذور التكعيبية للعدد

مثال 2

المركب  $27i$  باستخدام نتيجة مبرهنة

(x, y)

$$0 + 27i \rightarrow (0, 27), \quad n=3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2 + (27)^2} = \sqrt{27^2} \Rightarrow r = 27$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{27} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{27}{27} = 1$$

هنا لا نطبق قانون الأرباع

لأن الزاوية  $\frac{\pi}{2}$  لا تنتهي

الى ربع وثقع على الحدود بين الربعين الأول والثاني.

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right]$$

$$k=0 \quad \text{عندما} \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = 27^{\frac{1}{3}} \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]$$

$$Z_1 = 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

جد الجذور التربيعية للعدد

مثال 1

المركب  $-1 + \sqrt{3}i$  باستخدام نتيجة مبرهنة دي موافر.

(x, y)

$$-1 + \sqrt{3}i \rightarrow \left( -1, \sqrt{3} \right), \quad n=2 \quad \text{الربع الثاني}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد

$$\frac{\pi}{3}$$

الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \theta + i \sin \theta \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$k=0 \quad \frac{\frac{2\pi}{3} + 0}{2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$



الزاوية

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} \Rightarrow \frac{\pi + 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = (16)^{\frac{1}{4}} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_1 = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$\frac{\pi + 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z_2 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$k = 2 \text{ عندما } \frac{\pi + 4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_3 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} i$$

$$k = 3 \text{ عندما } \frac{\pi + 6\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z_4 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} i$$

k = 1

$$\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 3 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$Z_2 = 3 \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i$$

$$k = 2 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6}$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 3 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$= 3(0 - i) = -3i$$

جد الجذور الاربعة للعدد (-16).

مثال 3

$$-16 + 0i \rightarrow (x, y) \rightarrow (-16, 0) \quad n = 4$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-16)^2 + (0)^2} = \sqrt{256}$$

$$r = 16$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-16}{16} = -1$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0$$

لا نطبق قانون الأرباع لأن π تقع على الحدود بين الربعين الثاني والثالث.

$$\theta = \pi \text{ («تبقى كما هي»)}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

تابعونا على التليكرام

@iQRES



عندما  $k = 2$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi+8\pi}{2}}{6} = \frac{11\pi}{12}$$

$$Z_3 = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

عندما  $k = 3$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 6\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi+12\pi}{2}}{6} = \frac{15\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$Z_4 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$Z_4 = 2 \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

عندما  $k = 4$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 8\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$$

$$Z_5 = 2 \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

عندما  $k = 5$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 10\pi}{6}$$

$$\frac{23\pi}{12}$$

$$Z_6 = 2 \left( \cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$$

أوجد قيم  $(-64i)^{\frac{1}{6}}$  باستخدام  
مبرهنة دي موافر.

مثال 4

$(x, y)$

$$0 - 64i \rightarrow (0, -64), \quad n = 6$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{0 + (-64)^2} \Rightarrow r = 64$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{0}{64} = 0 \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{-64}{64} = -1 \end{aligned} \right\} \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

عندما  $k = 0$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 0}{6} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = (64)^{\frac{1}{6}} \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]$$

$$2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \Rightarrow Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

عندما  $k = 1$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{6} = \frac{\frac{3\pi+4\pi}{2}}{6} = \frac{7\pi}{12}$$

$$Z_2 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$



$$Z_1 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 1$   $\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} = \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{5} = \frac{7\pi}{15}$

$$Z_2 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 2$   $\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{5} = \frac{13\pi}{15}$

$$Z_3 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 3$   $\frac{\frac{\pi}{3} + 6\pi}{5} = \frac{19\pi}{15}$

$$Z_4 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right)$$

عندما  $k = 4$   $\frac{\frac{\pi}{3} + 8\pi}{5} = \frac{25\pi}{15} = \frac{5\pi}{3}$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

استخرجنا قيم  $\cos$  ,  $\sin$  لأن الزاوية خاصة



www.4es.com

مثال 5 أوجد الصيغة القطبية للمقدار

$(\sqrt{3} + i)^2$  ثم جد الجذور الخمسة له.

(x, y)

الربع الأول  $\sqrt{3} + i \rightarrow (\sqrt{3}, 1)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{6}$

ربع أول  $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^2 = 2^2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2$$

$$Z^2 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

الجذور الخمسة  $Z^{\frac{1}{5}}$

$$Z^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

عندما  $k = 0$

$$\frac{\frac{\pi}{3} + 0}{5} = \frac{\pi}{15}$$

مثال 6

حل المعادلة  $x^3 + 1 = 0$  باستخدام مبرهنة ديهوافر.

بالجذر التكعيبي  $x^3 = -1$

$$x = \sqrt[3]{-1} \Rightarrow x = (-1 + 0i)^{\frac{1}{3}}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} \Rightarrow r = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned} \right\} \theta = \pi$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k = 0 \quad \frac{\pi + 0}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$Z_1 = (1)^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{عندما } k = 1 \quad \frac{\pi + 2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi$$

$$Z_2 = (1)^{\frac{1}{3}} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$Z_2 = -1 + 0i$$

عندما  $k = 2$

$$\theta = \frac{\pi + 4\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z_3 = (1)^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

\* يمكن ان يكون منطوق السؤال بصيغ مختلفة مثل:

أولاً: باستخدام ديهوافر جد الجذور

التكعيبية للعدد  $(-1)$  معناها

$$x^3 = -1 \Rightarrow (-1 + 0i)^{\frac{1}{3}}$$

ثانياً: باستخدام ديهوافر جد الجذور

التكعيبية للعدد  $(8i)$  معناها

$$x^3 = 8i \Rightarrow (0 + 8i)^{\frac{1}{3}}$$

لذلك انتبه جيداً لمنطوق السؤال.



الأسئلة الوزارية حول موضوع المقياس والسعة والصيغة القطبية ومبرهنة ديموافر

**سؤال 3** ضح المقدار  $\frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i}$  بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وستعه الأساسية.

(2001 - د 1)

$$Z = \frac{7 + \sqrt{3}i}{1 + 2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{3}i}{1 - 2\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{7 - 14\sqrt{3}i + \sqrt{3}i + 6}{(1)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{13 - 13\sqrt{3}i}{13}$$

$$Z = \frac{13}{13} - \frac{13\sqrt{3}i}{13} \Rightarrow Z = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z = (1, -\sqrt{3})$$

$$(x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \quad ((\text{المقياس}))$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3} \quad ((\text{السعة}))$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{3}$  / الربع الرابع

**سؤال 1** إذا كان  $Z = (-\sqrt{3}, 1)$  عدداً مركباً أكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الأساسية للسعة.

(2002 - د 2)

$$Z = -\sqrt{3} + i \rightarrow (-\sqrt{3}, 1)$$

$$(x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4}$$

$$r = 2 \quad ((\text{المقياس}))$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} \quad ((\text{السعة}))$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{6}$  / الربع الثاني

**سؤال 2** إذا كان  $(-1 + \sqrt{3}i)$  عدداً مركباً جد مقياسه والقيمة الأساسية لسعته.

2008  
خارج القطر

$$Z = -1 + \sqrt{3}i \rightarrow (-1, \sqrt{3})$$

$$(x, y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{3}$  / الربع الثاني

**سؤال 6** جد القياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب  $(1 + \sqrt{3}i)$  (2008 - د (1)

**انتبه!** يجب وضع العدد المركب بصيغة  $a+bi$  والتخلص من التربيع.

$$Z = 1 + 2\sqrt{3}i - 3 \Rightarrow Z = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$Z = (-2, 2\sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12}$$

$$r = 4 \text{ ((القياس))}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد  $\frac{\pi}{3}$  / الربع الثاني

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

**سؤال 4** جد القياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب  $\frac{2i}{1+i}$  (2007 - د (2)

$$Z = \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \Rightarrow Z = \frac{2i - 2i^2}{(1)^2 + (1)^2}$$

$$Z = \frac{2+2i}{2} \Rightarrow Z = 1+i \quad \begin{matrix} (1,1) \\ (x,y) \end{matrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{4} / \text{ الربع الأول} \\ \text{السعة} \end{matrix} \right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{4} / \text{ الربع الأول} \\ \text{السعة} \end{matrix} \right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

**سؤال 5** جد القياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب  $\frac{4}{1-\sqrt{3}i}$  (2008 - د (2)

$$Z = \frac{4}{1-\sqrt{3}i} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$$

$$Z = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4}$$

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow (1, \sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{matrix} \right\}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{matrix} \right\}$$

**سؤال 7** إذا كان  $Z = 1 + \sqrt{3}i$  عدداً مركباً اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد القياس والسعة.

$$Z = 1 + \sqrt{3}i \rightarrow (1, \sqrt{3}) \quad (2006 - د (2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \left. \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{matrix} \right\}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left. \begin{matrix} \text{زاوية الأسناد } \frac{\pi}{3} / \text{ الربع الأول} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{matrix} \right\}$$





سؤال 8

إذا كان عدداً مركباً مقياسه 3 وسعته  $\frac{\pi}{3}$  جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2003 - د (2)

$$r = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$Z = \left( \frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right), \quad Z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

((الديكارتي))

((الجبري))

سؤال 9

إذا كان عدداً مركباً مقياسه (4) وسعته  $\left( \frac{5\pi}{6} \right)$  جد الشكل الديكارتي والجبري له.

2006 - د (1)

$$r = 4, \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$x = 4 \cdot \cos \frac{5\pi}{6} = 4 \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$y = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 4 \left( \frac{1}{2} \right) = 2$$

$$Z = (-2\sqrt{3}, 2), \quad Z = -2\sqrt{3} + 2i$$

((الديكارتي))

((الجبري))

سؤال 10

اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب  $3 - 3\sqrt{3}i$  (3) 2015 - د

$$Z = 3\sqrt{3}i \rightarrow Z = (3, -3\sqrt{3})$$

الربع الرابع (x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36}$$

$$r = 6$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الأسناد

هي  $\frac{\pi}{3}$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 6 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

سؤال 11

جد الصيغة القطبية للعدد المركب  $5 - 5i$  (3) 2014 - د

$$Z = 5 - 5i \rightarrow (5, -5)$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50}$$

$$r = 5\sqrt{2}$$



جد ببسط صورة

سؤال 13

(1) د - 2015  
خارج القطر

$$(a) \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)^{-3}$$

$$\left[ \cos \left( \frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{12} \cdot (-3) \right) \right]$$

$$\cos \frac{7\pi}{4} - i \sin \frac{7\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} i \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 5\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

زاوية الأسناد  
 $\frac{\pi}{4}$   
الربع الرابع

سؤال 12 أكتب العدد  $Z = (1 + \sqrt{3}i)^2$  بالصيغة

القطبية.

(1) د - 2016  
خارج القطر

$$Z = (1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3$$

$$= -2 + 2\sqrt{3}i \quad \begin{matrix} - & + \\ (-2, 2\sqrt{3}) \\ (x, y) \end{matrix}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16}$$

$$r = 4$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = 4 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

زاوية الأسناد  
 $\frac{\pi}{3}$   
الربع الثاني

هل أنت:

سؤال 14

(2) د - 2016  
خارج القطر

$$\frac{(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)^5}{(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 0$$

$$\frac{[(\cos \theta + i \sin \theta)^2]^5}{[(\cos \theta + i \sin \theta)^4]^2} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{10}}{(\cos \theta + i \sin \theta)^8} - (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 - (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 0$$

تنويه! لو قال باستخدام دي موافر لا نفتح

التربيع ونحل دي موافر  $n=2$



$$k = 2 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 5 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$Z_3 = 5(0 - i) \Rightarrow Z_3 = -5i$$

سؤال 16 جد الجذور التكعيبية للعدد

المركب  $(1+i)^2$  على وفق مبرهنة دي موافر.

2015 - د (2)  
خارج القطر

$$Z = 1+i \rightarrow Z = (1,1) \quad \text{الربع الأول}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الأسناد

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

$$Z^n = (\sqrt{2})^2 \left[ \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$Z^2 = 2 \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} \cdot 2 \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} \cdot 2 \right) \right]$$

$$Z^2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

جد الجذور التكعيبية للعدد

125i باستخدام مبرهنة دي موافر

سؤال 15

2015 - د (1)

$$Z = 0 + 125i \quad (0, 125)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2 + (125)^2} \Rightarrow r = 125$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{125} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{125}{125} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} (\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{n}}$$

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k = 0 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = 125^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_1 = 5 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \Rightarrow Z_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\text{عندما } k = 1 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 5 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$Z_2 = 5 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \Rightarrow Z_2 = \frac{-5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$



سؤال 16

جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة

للعدد المركبة  $(\sqrt{3} + i)^2$  (1) 2014 - د

$Z = \sqrt{3} + i \rightarrow Z = (\sqrt{3}, 1)$  الربع الأول  
(x, y)

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$

$r = 2$

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$  زاوية الأسناد  
الربع الأول  
 $\theta = \frac{\pi}{6}$

$Z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n$

$Z^2 = (2)^2 \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^2$

$Z^2 = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

سيتم تعويض الزوايا مباشرة بشكل مختصر

$k = 0, 1, 2, 3, 4, \theta = \frac{\pi}{3}, r = 4, n = 5$

الجذور الخمسة

$k = 0 \Rightarrow Z_1 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)$

$k = 1 \Rightarrow Z_2 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right)$

$k = 2 \Rightarrow Z_3 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right)$

$k = 3 \Rightarrow Z_4 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right)$

$k = 4 \Rightarrow Z_5 = \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{25\pi}{15} + i \sin \frac{25\pi}{15} \right)$

$= \sqrt[5]{4} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

لأنه طلب صيغة قطبية.  
لأنه طلب قيم الـ cos  
sin

$Z^2 = 2(0+i) \Rightarrow Z^2 = 0+2i$

$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \frac{\theta+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta+2k\pi}{n} \right]$

الجذور التكعيبية  $(Z^2)^{\frac{1}{3}}$

$(Z^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} \left[ \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{\frac{1}{3}}$

عندما  $k = 0$   $\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\pi}{6}$

$Z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

$Z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$

عندما  $k = 1$   $\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+4\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$Z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$

$Z_2 = \sqrt[3]{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$

عندما  $k = 2$   $\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi+8\pi}{2}}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$Z_3 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$

$Z_3 = \sqrt[3]{2} (0 - i)$



سؤال 18

باستخدام مبرهنة دي موافر جد

الجزور التكعيبية للعدد  $8i$

(1) د - 2015

نازحين

(1) د - 2016

$$k = 2 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Z_3 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 - i)$$

$$Z_3 = -2i$$

$$Z = 0 + 8i \rightarrow (0, 8)$$

(x, y)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(0)^2 + (8)^2} = \sqrt{0 + 64} \Rightarrow r = 8$$

$$\left[ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{8} = 0 \\ \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{8}{8} = 1 \end{array} \right] \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z^n = r^n \left[ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right]$$

$$\text{عندما } k = 0, \theta = \frac{\frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_1 = 8^{\frac{1}{3}} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$Z_1 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$Z_1 = (\sqrt{3} + i)$$

$$\text{عندما } k = 1, \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$Z_2 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$Z_2 = (-\sqrt{3} + i)$$

سؤال 19 جد مجموعة حل المعادلة في

مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة

$$x^3 - 8i = 0 \text{ دي موافر}$$

$$x^3 - 8i = 0 \Rightarrow x^3 = 8i \text{ الجذر التربيعي}$$

$$x = (8i)^{\frac{1}{3}}$$

نفس الحل في سؤال (18) تماماً.



صفحاتنا على الفيس بوك

f / iQRES

f / NTAAj.iQ



الآن نرفع الناتج للأس  $\frac{1}{2}$  وتحل نتيجة

$$(Z^{-3})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$r = 2, \quad k = 0, 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{1}{8}$$

$$k = 0 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$Z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$k = 1 \quad \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

$$Z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right)$$

$$Z_2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}i$$

باستخدام دي موافر احسب

سؤال 20

$$\cdot (\sqrt{3} + i)^{-3}$$

الربع الاول  $\Rightarrow (\sqrt{3} + i)$

أولاً: القوس كسر والبسط  $\neq 1$  لذلك هذا السؤال مبرهنة + نتيجة

$$\left[ (\sqrt{3} + i)^{-3} \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (\sqrt{3} + i)^{-3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4} \Rightarrow r = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\frac{\pi}{6} \text{ زاوية الاسناد} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta \text{ زاوية الاسناد}$$

$$Z^n = r^n [\cos \theta + i \sin \theta]^n$$

$$Z^{-3} = (2)^{-3} \left[ \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right]^{-3}$$

$$Z^{-3} = \frac{1}{(2)^3} \left[ \cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} \right]^{-3}$$

$$Z^{-3} = \frac{1}{8} \left[ \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right]^{-3}$$



WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق



موقع طلاب العراق

” (... شارك رابط موقعنا ... )  
مع اصدقائك لتعم الفائدة  
ولا تنسونا من صالح دعائكم

“

نتائج

كتب

ملازم

أخبار

أسئلة

التعليم العالي

وزارة التربية

تابعونا ..



@iQRES



/ iQRES



/ NTAAj.iQ

كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي

المفيد في ثلاثية  
حيّد وليّد  
الرياضيات



2019

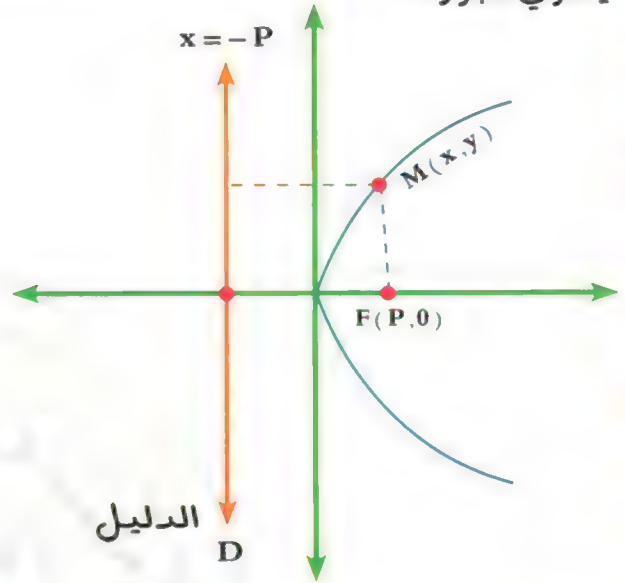
القطوع  
المخروطية

الفصل  
الثاني



## القطع المكافئ

هو مجموعة النقاط في المستوى والتي يكون بعد كل منها عن نقطة ثابتة  $F(P, 0)$  تسمى البؤرة حيث  $(P > 0)$  مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم  $(D)$  يسمى الدليل لا يحوي البؤرة.



البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ  $2P =$

للقطع المكافئ أربع حالات:

معادلة  
القطع القياسية

معادلة الدليل

البؤرة

أولاً: فتحة القطع نحو اليمين

$$y^2 = 4Px$$

$$x = -P$$

$$F(P, 0)$$

ثانياً: فتحة القطع نحو اليسار

$$y^2 = -4Px$$

$$x = +P$$

$$F(-P, 0)$$

ثالثاً: فتحة القطع نحو الأعلى

$$x^2 = 4Py$$

$$y = -P$$

$$F(0, P)$$

رابعاً: فتحة القطع نحو الأسفل

$$x^2 = -4Py$$

$$y = +P$$

$$F(0, -P)$$

حول معادلة القطع المكافئ القياسية:

ملاحظة

(1) تحتوي على متغيرين  $x, y$  أحدهما تربيع والآخر اس (1).

(2) القطع على محور المتغير الذي لا يحتوي تربيع.

(3) معامل متغير التربيع  $= 1$ . أنظر إلى معامل  $x^2$  و  $y^2$  في المعادلات كلها  $= 1$ .

إذا طلب البؤرة والدليل

جد البؤرة ومعادلة الدليل لكل من القطوع المكافئ الآتية:

مثال

(5)  $\frac{1}{5}x - y^2 = 0$

$\frac{1}{5}x = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{5}x$  نحو اليمين  
 $y^2 = 4Px$

$\left[4P = \frac{1}{5}\right] \div 4$   
 $P = \frac{1}{20}$

معادلة الدليل  $F\left(\frac{1}{20}, 0\right)$  ،  $x = \frac{-1}{20}$

(6)  $3x^2 - 24y = 0$

$[3x^2 = 24y] \div 3 \Rightarrow x^2 = 8y$   
 $x^2 = 4Py$

$[4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$

معادلة الدليل  $F(0, 2)$  ،  $y = -2$

(7)  $y^2 = 4x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$   
 $F(1, 0)$  ،  $x = -1$

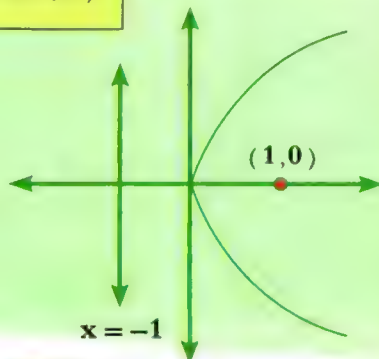
x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	$\pm 2$	(1, $\pm 2$ )
3	$\pm 2\sqrt{3}$	(3, $\pm 2\sqrt{3}$ )

إذا طلب الرسم:

نأخذ قيم x

ونعوضها بالمعادلة

ونجد y ثم نرسم.



(1)  $y^2 = -8x$   
 $y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$   
معادلة الدليل  $F(-2, 0)$  ،  $x = +2$

(2)  $x^2 = 4y$

$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 4] \div 4 \Rightarrow P = 1$

معادلة الدليل  $F(0, 1)$  ،  $y = -1$

(3)  $2x + 16y^2 = 0$

$[16y^2 = -2x] \div 16$

$y^2 = -\frac{1}{8}x$  نحو اليسار

$y^2 = -4Px$

$\left[4P = \frac{1}{8}\right] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{32}$

معادلة الدليل  $F\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$  ،  $x = \frac{1}{32}$

(4)  $\frac{1}{2}y^2 = 8x$

نضرب المعادلة اعلاه في (2) لجعل معامل  $y^2$  يساوي واحد حسب ملاحظات معادلة القطع المكافئ القياسية.

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$  يمين  
 $P = 4$

معادلة الدليل  $F(4, 0)$  ،  $x = -4$



**أولاً:** إذا أعطى بؤرة القطع المكافئ F معناها أعطى P

(1) نختار المعادلة المناسبة حسب البؤرة.

(2) نعوض P مباشرة ← **انتبه!** نعوض P موجبة دائماً في المعادلة القياسية.

**مثال 4** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (0, -4).

$$P = 4 \rightarrow \text{أسفل} \rightarrow (0, -4)$$

$$x^2 = -4Py$$

$$x^2 = -4(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$$

**مثال 1** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (0, 5) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 5 \rightarrow \text{أعلى} \rightarrow F(0, 5)$$

$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 4(5)y \Rightarrow x^2 = 20y$$

**مثال 5** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (5, 0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 5 \Rightarrow \text{يمين} \Rightarrow (5, 0)$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$$

**مثال 2** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (3, 0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 3 \rightarrow \text{يمين} \rightarrow F(3, 0)$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

**مثال 6** جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-4, 0) ورأسه نقطة الاصل.

$$P = 4 \rightarrow \text{يسار} \rightarrow (-4, 0) \text{ نعوض (+)}$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -16x$$

**مثال 3** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته (0,  $\sqrt{2}$ ).

$$P = \sqrt{2} \rightarrow \text{أعلى} \rightarrow F(0, \sqrt{2})$$

$$x^2 = 4Py$$

$$x^2 = 4(\sqrt{2})y \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{2}y$$

**ثانياً:** إذا أعطى معادلة الدليل معناها أعطى (P) وتذكر ان اشارة الدليل عكس اشارة البؤرة.

مثلاً: إذا أعطى معادلة الدليل  $x = +3$  البؤرة سالبة لأن الدليل + ((القطع يسار X))

$y = -5$  البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع أعلى Y))

$x = -\sqrt{2}$  البؤرة موجبة لأن الدليل - ((القطع يمين X))

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله  $4y + 3 = 0$  ورأسه نقطة الاصل.

$$4y + 3 = 0$$

$$[4y = -3] \div 4 \Rightarrow y = \frac{-3}{4}$$

البؤرة موجبة لأن الدليل سالب

$$P = \frac{3}{4}$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow x^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)y$$

$$x^2 = 3y$$

لاتنسى ان تعويض P يكون موجب دائماً في المعادلة القياسية

انتبه!

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله  $y = 7$  والرأس نقطة الاصل.

$$y = 7 \rightarrow P = 7$$

البؤرة سالبة لأن الدليل (+) / أسفل (y)

$$x^2 = -4Py$$

$$x^2 = -4(7)y$$

$$x^2 = -28y$$

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومعادلة دليله  $2x - 6 = 0$

$$2x - 6 = 0$$

$$[2x = 6] \div 2 \Rightarrow x = 3$$

البؤرة سالبة لأن الدليل موجب  $P = 3$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow y^2 = -4(3)x$$

$$y^2 = -12x$$

إذا أعطى في السؤال نقطتين وقا ان القطع يمر بالنقطتين فإن خطوات لحل هي:

ملاحظة ومثال

(1) نعين النقاط في الارباع لتحديد فتحة القطع.

(2) نختار المعادلة المناسبة حسب فتحة القطع.

(3) نعوض واحدة من النقاط بـ  $x, y$  ونجد  $P$  ونعوض ( $P$ ) بالمعادلة القياسية.



مثال 10

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين  $(2, 4)$  ،  $(2, -4)$  والرأس نقطة الاصل.

ربع أول  $\rightarrow (2, 4)$

ربع رابع  $\rightarrow (2, -4)$

القطع نحو اليمين.

$(x, y)$

$$y^2 = 4Px$$

$(2, 4)$

$$(4)^2 = 4P(2)$$

$$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = 2$$

$$y^2 = 8x$$

أول

رابع

مثال 11

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين  $(2, 5)$  ،  $(2, -5)$  والرأس نقطة الاصل.

ربع أول  $\rightarrow (2, 5)$

ربع رابع  $\rightarrow (2, -5)$

القطع نحو اليمين.

$$y^2 = 4Px \quad (2, 5)$$

$$(5)^2 = 4(P)(2)$$

$$[25 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{25}{8}$$

$$y^2 = 4\left(\frac{25}{8}\right)x \Rightarrow y^2 = \frac{25}{2}x$$

إستراحة شهرية:

زمالك الحاسدون بكل غيب

وعيبك أن حسنك لا يُعاب

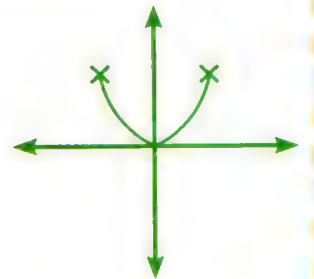
مثال 12

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من  $(-1, 2)$   $(\sqrt{3}, 6)$  ولأسه نقطة الاصل... اضافي.

ربع أول  $(\sqrt{3}, 6)$

ربع ثاني  $(-1, 2)$

القطع نحو الأعلى.



نختار أي نقطة

$$x^2 = 4Py \quad (\sqrt{3}, 6)$$

$$(\sqrt{3})^2 = 4P(6)$$

$$[3 = 24P] \div 24 \Rightarrow P = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y$$

إذا أعطى نقطة واحدة فقط  $(x, y)$  وقال ان القطع يمر من النقطة  $(x, y)$  هناك حالتان:

ملاحظة ومثال

الاولى ان يحدد موقع البؤرة (على محور السينات أو الصادات) وهنا يوجد معادلة واحدة للقطع ← تابع المثال.

مثال 14 جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر من النقطة  $(\sqrt{2}, 1)$  وبؤرته على محور الصادات... اضافي.

مثال 13 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة  $(-1, 8)$  وبؤرته على محور السينات ورأسه نقطة الأصل... اضافي.

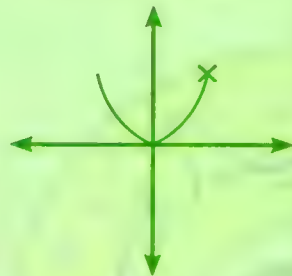
ربع أول  $(\sqrt{2}, 1) \rightarrow$   
البؤرة صادات ← أعلى

$$x^2 = 4Py \quad (\sqrt{2}, 1)$$

$$(\sqrt{2})^2 = 4P(1)$$

$$[2 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y \Rightarrow x^2 = 2y$$



ربع ثاني  $(-1, 8) \rightarrow$

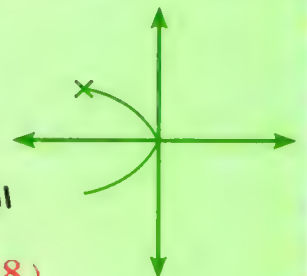
البؤرة سينات ← يسار

$$y^2 = -4Px \quad (-1, 8)$$

$$8^2 = -4P(-1)$$

$$64 = 4P \Rightarrow P = \frac{64}{4} \Rightarrow P = 16$$

$$y^2 = -4(16)x \Rightarrow y^2 = -64x$$



لا يحدد موقع البؤرة لذلك هناك احتمالين  
بؤرة سينات  
بؤرة صادات

الثانية

مثال 15 جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر من النقطة  $(-2, -4)$  ورأسه نقطة الأصل.

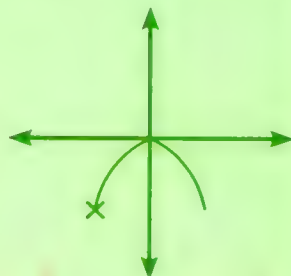
بؤرة صادات / اسفل

$$x^2 = -4Py$$

$$(-2)^2 = -4P(-4)$$

$$[4 = 16P] \div 16 \Rightarrow P = \frac{4}{16} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{4}\right)y \Rightarrow x^2 = -y$$



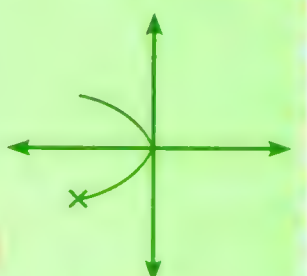
بؤرة سينات / يسار

$$y^2 = -4Px$$

$$(-4)^2 = -4P(-2)$$

$$[16 = 8P] \div 8 \Rightarrow P = \frac{16}{8} \Rightarrow P = 2$$

$$y^2 = -8x$$





ملاحظة ومثال

إذا أعطى في السؤال نقطة  $(x, y)$  وقال ان دليل القطع يمر من هذه النقطة.

انتبه!

لا نعوض هذه النقطة أبداً في معادلة القطع المكافئ القياسية لأن القطع لا يمر بها ولا تحققت معادلة القطع.

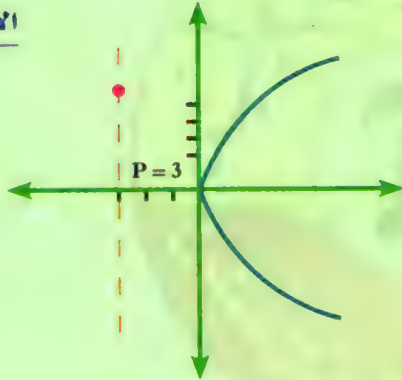
**مثال 17** إذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة  $(-3, 4)$  والرأس نقطة الأصل جد معادلة القطع.

الاحتمال الأول:

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$



**مثال 16** جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع بالنقطة  $(3, -5)$ .

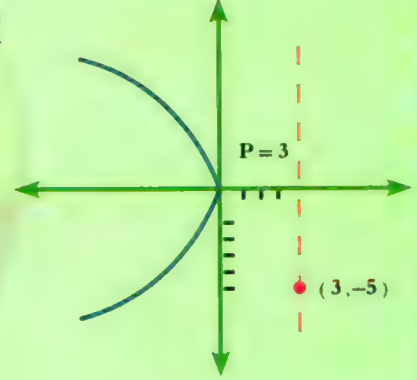
الاحتمال الأول:

$$P = 3$$

$$y^2 = -4Px$$

$$y^2 = -4(3)x$$

$$y^2 = -12x$$

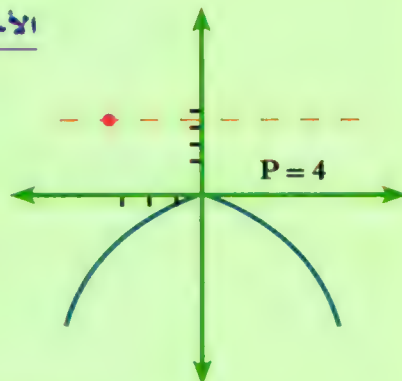


الاحتمال الثاني:

$$x^2 = -4Px$$

$$x^2 = -4(4)y$$

$$x^2 = -16y$$



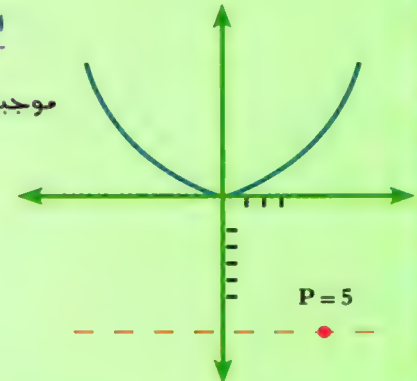
الاحتمال الثاني:

موجبة لاتنسى  $(P = 5)$

$$x^2 = 4Px$$

$$x^2 = 4(5)y$$

$$x^2 = 20y$$



مثال 18

قطع مكافئ معادلته  $Ax^2 + 8y = 0$  ويبر من النقطة  $(1, 2)$  جد قيمة  $(A)$  ثم جد البؤرة والدليل وارسم القطع.

$$\begin{aligned} Ax^2 + 8y &= 0 \\ A(1)^2 + 8(2) &= 0 \\ A + 16 &= 0 \Rightarrow A = -16 \end{aligned}$$

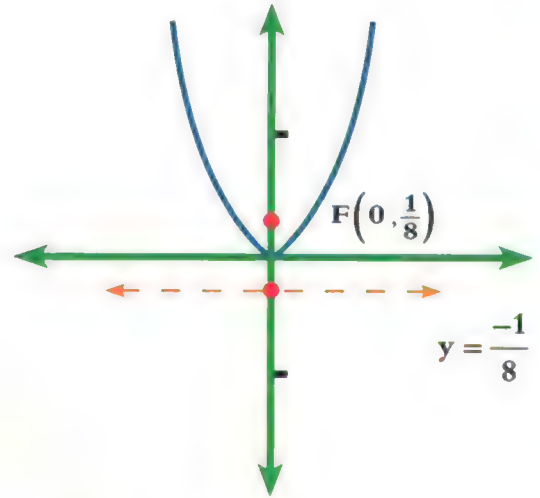
$$-16x^2 + 8y = 0 \Rightarrow [-16x^2 = -8y] \div -16$$

$$\frac{-16x^2}{-16} = \frac{-8y}{-16} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y \quad \text{أعلى}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 4Py \\ \left[ 4P = \frac{1}{2} \right] \div 4 \\ P &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

البؤرة  $F(0, \frac{1}{8})$

معادلة الدليل  $y = \frac{-1}{8}$



” التحضير اليومي ”

سر من اسرار التفوق  
فلا تهمل هذا السر

WWW.IQ-RES.COM



إيجاد معادلة القطع المكافئ باستخدام التعريف

مثال 19

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته  $(7, 0)$  والرأس نقطة الأصل.

حسب التعريف  $L_1 = L_2$

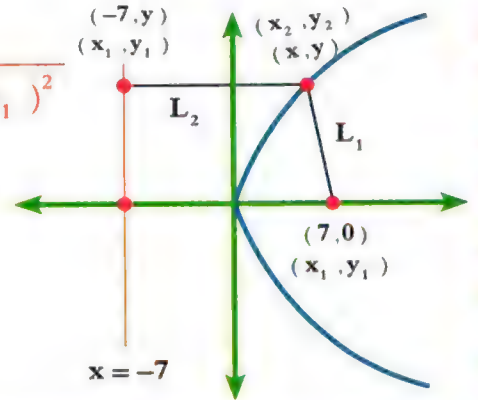
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x - 7)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + 7)^2 + (y - y)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49 + 0^2$$

مربع حدانية                      مربع حدانية

$$y^2 = 14x + 14x \Rightarrow y^2 = 28x$$



مثال 20

جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله  $y = \sqrt{3}$  باستخدام التعريف.

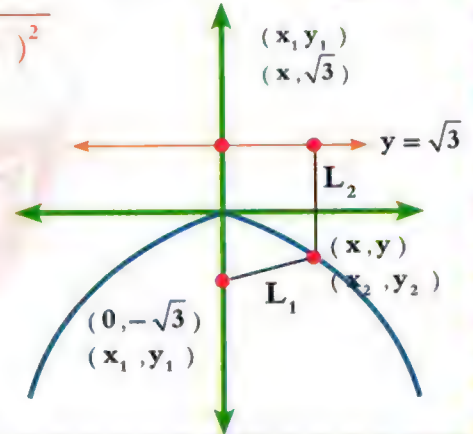
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y + \sqrt{3})^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - \sqrt{3})^2}$$

بالتربيع

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = 0^2 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$$

$$x^2 = -2\sqrt{3}y - 2\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 = -4\sqrt{3}y$$



مثال 21

باستخدام التعريف جد معادلة قطع مكافئ بؤرته  $(\sqrt{3}, 0)$  والرأس نقطة الأصل.

حسب التعريف  $L_1 = L_2$

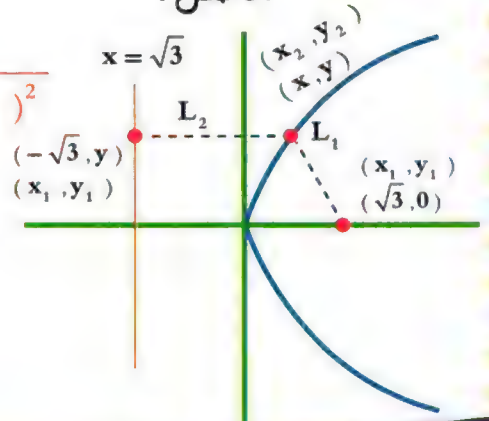
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + \sqrt{3})^2 + (y - y)^2}$$

بالتربيع

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 + 0$$

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$





## الأسئلة الوزارية حول موضوع القطع المكافئ

**سؤال 3** قطع مكافئ معادلته  $\frac{1}{4}y^2 = hx$  دليله يمر بالنقطة  $(-6, 3)$  جد قيمة  $h$ .

2008  
تمهيدي

$$\left[\frac{1}{4}y^2 = hx\right] \cdot 4$$

$$y^2 = 4hx$$

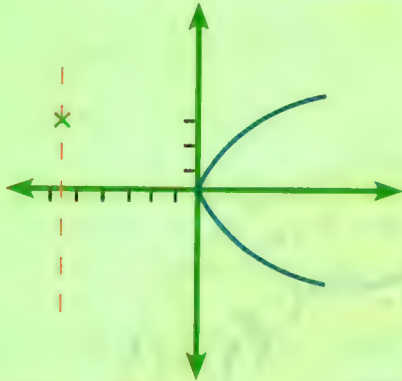
$$P = 6$$

$$y^2 = 4(6)x$$

$$y^2 = 24x$$

$$y^2 = 4hx \Rightarrow 4h = 24$$

$$h = 6$$



ملاحظة

عرفنا ان القطع على محور السينات لأن المعادلة بدلالة  $(y^2)$ .  
ولا يمكن تعويض النقطة  $(-6, 3)$  لأن الذي يمر بها الدليل وليس القطع.

**سؤال 1** جد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين  $(3, 6)$  ,  $(-3, 6)$  ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (1)

ربع أول  $\rightarrow (3, 6)$

ربع رابع  $\rightarrow (-3, 6)$

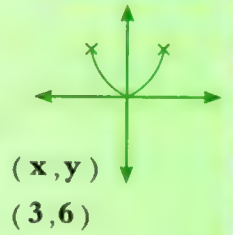
$$x^2 = 4Py \quad ((\text{نحو الأعلى}))$$

$$(3)^2 = 4P(6)$$

$$9 = 24P \Rightarrow P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y$$

$$y = -P \Rightarrow y = -\frac{3}{8} \quad \text{معادلة الدليل}$$



**سؤال 2** جد معادلة القطع مكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين  $(1, 3)$  ,  $(1, -3)$  ثم جد معادلة دليله.

2006 - د (2)

ربع أول  $\rightarrow (3, 6)$

ربع رابع  $\rightarrow (1, -3)$

$$(-3, 6) \rightarrow$$

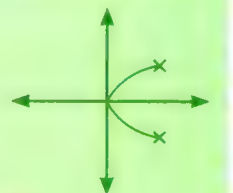
$$y^2 = 4Px$$

$$(3)^2 = 4P(1)$$

$$[9 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = \frac{9}{4}$$

$$y^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right)x \Rightarrow y^2 = 9x$$

$$x = -P \rightarrow x = -\frac{9}{4} \quad \text{معادلة الدليل}$$

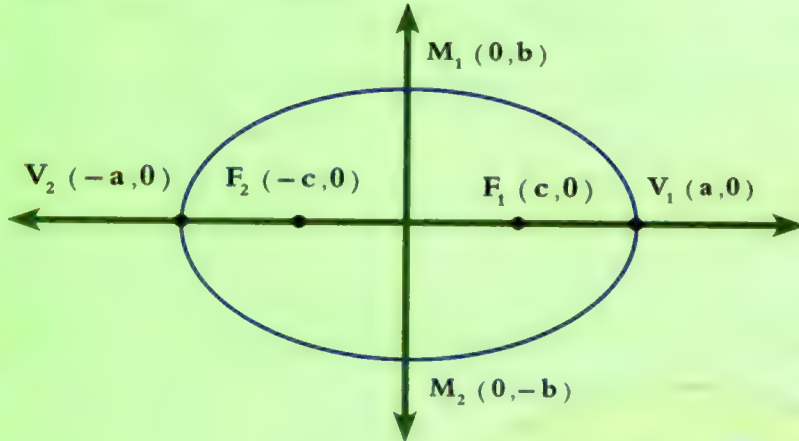




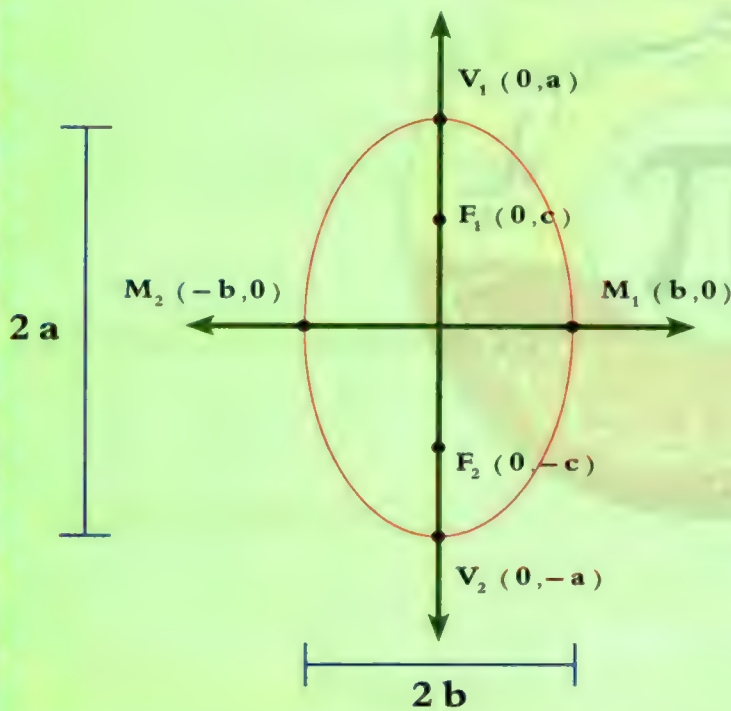
## القطع الناقص Ellipse

**تعريف:** هو مجموعة النقط على المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتين (البؤرتان) عدد ثابت.

المصطلحات والرموز:



((قطع ناقص بؤرتاه تنتهيات  
لبحور السينات))

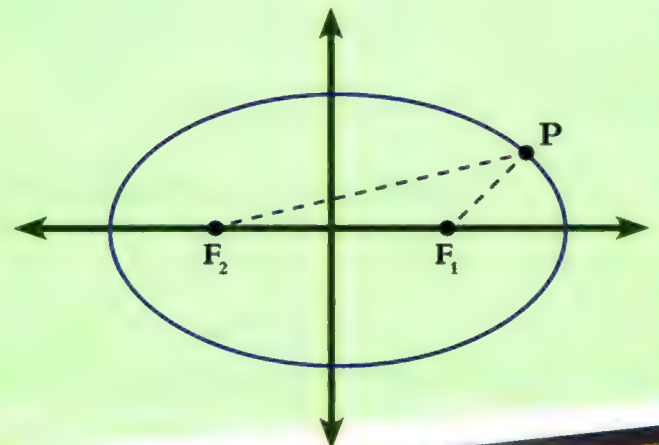


((قطع ناقص بؤرتاه تنتهيات  
لبحور الصادات))

$V_1, V_2 \leftarrow$  الرأسان  
 $F_1, F_2 \leftarrow$  البؤرتان  
 $M_1, M_2 \leftarrow$  القطبان

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$PF_1 + PF_2$  / مجموع بعدي نقطة عن بؤرتيه



## بعض الرموز

$2a$  = طول المحور الكبير ((البعد بين الرأسين)) ... ((العدد الثابت))

$2c$  = البعد بين البؤرتين ((البعد البؤري))

$2b$  = طول المحور الصغير ((البعد بين القطبين))

## قوانين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(1) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(2) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات

$$A = a \cdot b \cdot \pi$$

(3) لإيجاد مساحة القطع الناقص

$$P = 2 \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

(4) لإيجاد محيط القطع الناقص

$$e < 1 \quad e = \frac{c}{a}$$

أصغر من (1)

(5) لإيجاد الاختلاف المركزي

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(6) القانون العام للقطع الناقص

\* معادلة المحور الكبير  $x = 0$   
معادلة المحور الصغير  $y = 0$   
إذا كان القطع بؤرتاه على محور الصادات.

\* معادلة المحور الكبير  $y = 0$   
معادلة المحور الصغير  $x = 0$   
إذا كان القطع بؤرتاه على محور السينات.



## ملاحظات حول القطع الناقص

أولاً: عندما يعطي

- بؤرة يعني  $c$
- رأس يعني  $a$
- قطب يعني  $b$

ثانياً: إذا أعطى:

- (1) طول المحور الكبير مثلاً  $(12) \leftarrow 2a = 12$  ونجد  $a$
- (2) طول المحور الصغير مثلاً  $(16) \leftarrow 2b = 16$  ونجد  $b$
- (3) المسافة بين البؤرتين ((البعد البؤري)) مثلاً  $(8) \leftarrow 2c = 8$  ونجد  $c$

ثالثاً: كيف نحول الكلام الى صيغة رياضية؟  $\leftarrow$  تابع بعض العبارات:

- (1) مجموع طولي محوريه  $\leftarrow 2a + 2b$
- (2) مجموع مربعي طولي محوريه  $\leftarrow (2a)^2 + (2b)^2$
- (3) الفرق بين طولي محوريه  $\leftarrow$  إذا كان الفرق (+)  $2a - 2b$   
إذا كان الفرق (-)  $2b - 2a$

- (4) النسبة:
- |          |          |                             |                 |                        |
|----------|----------|-----------------------------|-----------------|------------------------|
| رقم كبير | رقم صغير | عندما النسبة أكبر من (1) أو | $\frac{2a}{2b}$ | النسبة بين طولي محوريه |
| رقم صغير | رقم كبير | عندما النسبة أصغر من (1) أو | $\frac{2b}{2a}$ |                        |

مثلاً:

النسبة بين طول محوره الكبير الى البعد بين البؤرتين

بسط  $(2a)$  مقام  $(2c)$

$$\frac{2a}{2c}$$

بعد  
كلمة الى  
يصبح مقام  
دائماً

مثلاً:

النسبة بين البعد بين بؤرتيه الى طول محوره الصغير

بسط  $(2c)$  مقام  $(2b)$

$$\frac{2c}{2b}$$

$a$  أكبر من  $b$  أكبر من  $c$  دائماً  
 $a > b$  ,  $a > c$

انتبه!

الاختلاف المركزي  $e$  أصغر من (1) إذا أعطى اختلاف أصغر من (1) ولم يذكر نوع القطع فهذا القطع ناقص.

انتبه!

بعض المصطلحات الإضافية: كي تتعلم كيف تحول الكلام الى علاقة رياضية:

\* مجموع طول محوره الكبير ونصف طول محوره الصغير

$$2a + \frac{1}{2}(2b)$$

↓                      ↓

طول محوره الكبير      نصف طول محوره الصغير

\* طول محوره الكبير يزيد على طول محوره الصغير به مقدار (4)

$$2a - 2b = 4$$

\* طول محوره الكبير ثلاثة امثال طول محوره الصغير

$$2a = 3(2b)$$

↓                      ↓

محوره الكبير      ثلاثة امثال محوره الصغير

إذا اعطى ((المساحة - المحيط - الاختلاف المركزي)) نستفاد من قوانين هذه المعطيات لإيجاد علاقة أو معادلة.

\* حاول دائماً في حالة الربط بين القطع الناقص والمكافئ ان تجد (P) من معادلة القطع المكافئ لانها سوف تمثل a أو b أو c للناقص حسب السؤال.





## العلاقة بين القطعين المكافئ والناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$P = C$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي احد راسيه هو بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$P = a$$

مكافئ ناقص

جد معادلة القطع الناقص الذي احد بؤرتيه تنطبق على بؤرة القطع المكافئ ... الخ .

$$P = C$$

مكافئ ناقص

### ملاحظة هامة

(1) كل بهر  $(x, 0)$  ,  $(0, y)$  تعني اما  $(a)$  او  $(b)$  شروط ان يكون اما  $x = 0$  او  $y = 0$  سوف يمثّل اما  $(a)$  او  $(b)$

(2) كل يمس سوف يمثّل اما  $(a)$  او  $(b)$

\* جد معادلة القطع الناقص الذي يمس دليل القطع المكافئ ... الخ .

$$P \rightarrow \text{سوف يمثّل اما } (a) \text{ او } (b)$$

اما (a) او (b)

(3) كل يقطع عند رقم  $x = \pm$  او رقم  $y = \pm$  هذا الرقم يمثّل  $(a)$  او  $(b)$  ويؤخذ موجب .

(4) عندما يذكر عبارة نقطة التقاطع مع محور السينات أو الصادات :

نقطة التقاطع مع محور السينات  $y = 0$

مثال

جد معادلة القطع الناقص الذي احد بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم  $2x - y = 8$  مع محور السينات .

$$2x - y = 8$$

$$y = 0$$

$$[2x = 8] \div 2 \Rightarrow x = 4$$

نقطة  $(4, 0)$

نقطة التقاطع مع محور الصادات  $x = 0$

**مثال** جد معادلة القطع الناقص الذي احدى رأساه نقطتا تقاطع المنحني  $x^2 + y^2 - 3x = 16$  مع محور الصادات.

$$x^2 + y^2 - 3x = 16, \quad x = 0$$

$$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y \pm 4$$

$$x = 0$$

$$(0, 4), (0, -4)$$

### استراحة شعرية:

قمرٌ تكامل في المحاسن وانتهى  
فالشمس تشرق من شقائق خده  
ملكُ الجمالِ بأسره فكأنما  
حسنُ البرية كلها من عنده





الحالة الأولى:

إذا أعطى معادلة القطع الناقص واطلب معلومات القطع من (بؤرتان - رأسان ... مساحة محيط ... الخ).

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

صادات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

سينات

أولاً: يجب ان نضع المعادلة بالشكل القياسي

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هنا

لازم واحد

ثانياً: يجب ان يكون معامل  $x^2$  ومعامل  $y^2$  واحد

ثالثاً: إذا كان هناك ثابت (رقم) بعد اليساوي وكان عدد صحيح (ليس كسر) نقسم عليه

المعادلة ← تابع المثال التوضيحي  $16x^2 + 9y^2 = 144$

$$\left[ \frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144} \right] \div 144 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

وإذا كان بعد اليساوي كسر نضرب المعادلة في مقلوب الكسر تابع المثال التالي:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{نضرب } \frac{3}{2}x \text{ وهو}$$

$$\frac{2}{3} \text{ مقلوب الـ}$$

$$\frac{x^2}{12} \left( \frac{3}{2} \right) + \frac{y^2}{3} \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

انتبه!

$$\frac{3x^2}{5} + \frac{2y^2}{7} = 1$$

ينزل تحت المقام

في حالة وجود عدد (معامل)  $x^2$  أو  $y^2$  يصبح مقام للمقام ← مثلاً

$$\frac{x^2}{\frac{5}{3}} + \frac{y^2}{\frac{7}{2}} = 1$$

مثال 2

عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي القطع  $x^2 + 2y^2 = 1$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{2y^2}{1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

الأكبر  $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$  ((سينات))

الأصغر  $b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F_1(c, 0) \rightarrow F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$
 ((البؤرتان))

$$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(1, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-1, 0)$$
 ((الرأسان))

$$M_1(0, b) \rightarrow M_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M_2(0, -b) \rightarrow M_2\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
 ((القطبان))

طول المحور الكبير  $2a = 2(1) = 2$  وحدة

طول المحور الصغير  $2b = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$  وحدة

معادلة المحور الكبير  $y = 0$  ←

معادلة المحور الصغير  $x = 0$  ←

«أصغر»  $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

\* المركز  $O(0, 0)$  نقطة الأصل

مثال 1

جد طول كل من المحورين وإحداثي البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي ومساحة ومحيط القطع الناقص.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

((المعادلة بالشكل القياسي))  
لا تحتاج ترتيب

العدد الأكبر هو  $a^2 = 25 \leftarrow 25$

العدد الأصغر هو  $b^2 = 16 \leftarrow 16$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$c = 3$$

طول المحور الكبير  $2a = 2(5) = 10$  وحدة

طول المحور الصغير  $2b = 2(4) = 8$  وحدة

$$F_1(c, 0) \rightarrow F_1(3, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \rightarrow F_2(-3, 0)$$
 ((البؤرتان))

$$V_1(a, 0) \rightarrow V_1(5, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \rightarrow V_2(-5, 0)$$
 ((الرأسان))

«أصغر»

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6 < 1$$

وحدة  $A = a \cdot b\pi \Rightarrow A = (5 \times 4)\pi = 20\pi$  مربعة

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{25 + 16}{2}}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{41}{2}}$$
 وحدة



مثال 4 ناقش القطع الناقص  $4x^2 + 3y^2 = \frac{4}{3}$

$$4x^2 \left( \frac{3}{4} \right) + 3y^2 \left( \frac{3}{4} \right) = \frac{4}{3} \left( \frac{3}{4} \right)$$

$$\left( \frac{3x^2}{1} \right) + \left( \frac{9y^2}{4} \right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{4}{9}} = 1$$

الأكبر  $\frac{4}{9} \rightarrow a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$  (صادات)

الأصغر  $\frac{1}{3} \rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4-3}{9}}$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$F_1 (0, c) \rightarrow F_1 (0, \frac{1}{3})$$

$$F_2 (0, -c) \rightarrow F_2 (0, -\frac{1}{3})$$
 البؤرتان

$$V_1 (0, a) \quad V_1 (0, \frac{2}{3})$$

$$V_2 (0, -a) \quad V_2 (0, -\frac{2}{3})$$
 الرأسان

$$M_1 (0, b) \quad B_1 (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

$$M_2 (0, -b) \quad B_2 (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$
 ((القطبان))

وحدة  $\frac{4}{3} = 2 \left( \frac{2}{3} \right) = 2a =$  طول المحور الكبير

وحدة  $\frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 2b =$  طول المحور الصغير

$x = 0 \Leftarrow$  معادلة المحور الكبير

$y = 0 \Leftarrow$  معادلة المحور الصغير

وحدة  $A = a \cdot b \pi = \left( \frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \pi = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi$  مربعة

وحدة  $P = 2 \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2 \pi \sqrt{\frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{3}}{2}} = 2 \pi \sqrt{\frac{7}{18}} \pi$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}$$

مثال 3 عين البؤرتان والرأسان والقطبان

والهركز ثم جد طول ومعادلة المحورين والاختلاف

المركزي للقطع  $9x^2 + 13y^2 = 117$

$9x^2 + 13y^2 = 117 \rightarrow \div 117$  ((ملاحظة ثالثاً))

$$\frac{9x^2}{117} + \frac{13y^2}{117} = \frac{117}{117} \Rightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$  (سينات)

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13 - 9}$

$c = \sqrt{4} \Rightarrow c = 2$

$F_1 (c, 0) \rightarrow F_1 (2, 0)$

$F_2 (-c, 0) \rightarrow F_2 (-2, 0)$  البؤرتان

$V_1 (a, 0) \rightarrow V_1 (\sqrt{13}, 0)$

$V_2 (-a, 0) \rightarrow V_2 (-\sqrt{13}, 0)$  الرأسان

$M_1 (0, b) \rightarrow M_1 (0, 3)$

$M_2 (0, -b) \rightarrow M_2 (0, -3)$  ((القطبان))

وحدة  $2\sqrt{13} = 2(\sqrt{13}) = 2a =$  طول المحور الكبير

وحدة  $6 = 2(3) = 2b =$  طول المحور الصغير

$y = 0$  معادلة المحور الكبير

$x = 0$  معادلة المحور الصغير

\* الهركز  $O(0, 0)$  نقطة الأصل

الاختلاف الهركزي  $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}}$



أولاً: الأسئلة الأساسية: وهي الأسئلة التي يعطي فيها البؤرة أو الرأس أو القطب مباشرة أو يعطي طول المحور الصغير أو البعد بين البؤرتين ... الخ .

$$b = \sqrt{11} \Rightarrow b^2 = 11$$

القطع على محور السينات لأن البؤرة على محور السينات .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

مثال 3 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والمسافة بين البؤرتين (8) وحدات ونصف طول محوره الصغير يساوي (3) وحدات .

$$\begin{aligned} 2c &= \text{المسافة بين البؤرتين} \\ 2c &= 8 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (2b) = 3 \Rightarrow b = 3$$

نصف محوره الصغير

نجد a من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} &= 1 \end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

مثال 1 جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه  $F_2 (-3, 0)$  ,  $F_1 (3, 0)$  ورأساه  $V_2 (-5, 0)$  ,  $V_1 (5, 0)$

$$\text{(السينات)} \rightarrow c = 3 \quad \text{(البؤرة)}$$

$$\text{(السينات)} \rightarrow a = 5 \quad \text{(الرأس)}$$

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 2 جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه  $(-5, 0)$  ,  $(5, 0)$  وطول محوره الكبير = 12 وحدة .

$$\text{(السينات)} \rightarrow c = 5 \quad \text{(البؤرة)}$$

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$$

نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{(6)^2 - (5)^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 25}$$





مثال 4

جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه  $(0, \pm 2)$  ويتقاطع مع محور السينات عند  $x = \pm 4$

موقع طلاب العراق  
(الصادات)  $c = 2 \rightarrow (c)$  البؤرة

ملاحظة

$x = 4$  تُعتبر  $(b)$  قطب لأن البؤرة على محور الصادات والذي يعاكس البؤرة هو القطب لذلك  $(b = 4)$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (2)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 4 \Rightarrow a^2 = 20$$

$$\text{معادلة الصادات} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$$



مثال 5

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والاختلاف المركزي  $(\frac{1}{2})$  وطول محوره الصغير (12) وحدة.

$$[2b = 12] \div 2 \Rightarrow 2b = 12 \Rightarrow b = 6$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 2c \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2c)^2 = (6)^2 + c^2 \Rightarrow 4c^2 = 36 + c^2$$

$$4c^2 - c^2 = 36$$

$$[3c^2 = 36] \div 3$$

$$c^2 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$a = 2c \Rightarrow a = 2(2\sqrt{3})$$

$$a = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 48$$

لم يتم تحديد موقع البؤرة ولها احتماليين:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{أولاً: على محور السينات}$$

$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{ثانياً: على محور الصادات}$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$$

مثال 6

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 12x = 0$  وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات.

$$[2b = 10] \div 2 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

القطع المكافئ: دائماً نجد P من معادلة القطع المكافئ.

$$y^2 - 12x = 0 \Rightarrow y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px$$

$$[4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

$$F(3, 0)$$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
$P$	=	$c$
مكافئ		ناقص

$$c = 3, \quad b = 5, \quad a = ?$$

من القانون العام نجد a

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (5)^2 + (3)^2$$

$$a^2 = 25 + 9 \Rightarrow a^2 = 34$$

بؤرتا القطع الناقص على محور السينات لأن بؤرة القطع المكافئ على السينات.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$







مثال 7

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ ( $x^2 = 24y$ ) ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

\* نستفد من معادلة المكافئ لنجد P

$$x^2 = 24y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6 \Rightarrow F(0, 6)$$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
$P$	=	$c$
مكافئ		ناقص

$$\Rightarrow c = 6$$

$$[2a + 2b = 36] \div 2 \leftarrow \text{مجموع طولي محوريه}$$

$$a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - a \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (18 - a)^2 + (6)^2$$

مربع حدانية

$$a^2 = 324 - 36a + a^2 + 36 \Rightarrow [36a = 360] \div 36$$

$$a = 10$$

نعوض a في المعادلة (1)

$$b = 18 - a$$

$$b = 18 - 10 \Rightarrow b = 8$$

بؤرة الناقص على محور الصادات لذلك القطع على محور الصادات.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

مثال 8

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني  $x^2 + y^2 - 3x = 16$  مع محور الصادات ويهس دليل القطع المكافئ ( $y^2 = 12x$ ).

نقطة التقاطع مع محور الصادات  $x = 0$

$$x^2 + y^2 - 3x = 16$$

$$(0)^2 + y^2 - 3(0) = 16 \Rightarrow y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

$$F_1(0, 4) \quad F_2(0, -4) \rightarrow c = 4 \text{ (صادات)}$$

استفد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3 \text{ (سينات)}$$

كلمة يهس يعني أما a أو b

وهنا ( $P = b$  مكافئ) لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات والذي يخالف البؤرة هو (b)

لذلك  $b = 3$

$$b = 3$$

نجد a من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 9 + 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$





مثال 9

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بينهما (6) وحدات والفرق بين طولي محوريه (2).

$$[2c=6] \div \Rightarrow c=3$$

$$[2a-2b=2] \div 2 \Rightarrow a-b=1$$

$$a=1+b \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(1+b)^2 = b^2 + 3^2$$

$$1+2b+b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 2b = 9-1$$

$$[2b=8] \div 2$$

$$b=4 \quad (\text{نعوض في معادلة رقم (1)})$$

$$a=1+b$$

$$a=1+4 \Rightarrow a=5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 10

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ  $(y^2 + 8x = 0)$  عند النقطة التي إحداثيها السيني (-2).

$$[2a = 2(2b)] \div 2$$

ضعف محوره الصغير = محوره الكبير

$$a = 2b \dots\dots\dots (1)$$

يقطع القطع عند النقطة  $x = -2$  تعوضه قيمة  $x$  في معادلة القطع المكافئ

$$y^2 + 8(-2) = 0 \Rightarrow y^2 = 16$$

بالجذر

$$y = \pm 4$$

$$(-2, 4), \quad (-2, -4)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نعوض إحدى النقطتين ولتكن  $(-2, 4)$

$$\frac{(-2)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

ونعوض أيضاً  $a = 2b$

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1}$$

$$b^2 = 17 \Rightarrow b = \sqrt{17}$$

$$a = 2b \Rightarrow a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$$

زوروا موقعنا للمزيد

WWW.IQ-RES.COM





إذا أعطى في السؤال نقطة  $(x, y)$  شرط لا تحوي احدائي صفر

ملاحظة ومثال

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

نستفيد من معادلة القطع القياسية

لنعوض النقطة  $(x, y)$  ونكون معادلة.

$$12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

جمع

$$15b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$$

$$0 = b^4 + 4b^2 - 15b^2 - 12$$

طرح

$$b^4 - 11b^2 - 12 = 0$$

$$(b^2 + 1)(b^2 - 12) = 0$$

$$\underline{\text{أما}} \quad b^2 + 1 = 0 \quad \text{يُهمَل} \quad \notin \mathbb{R}$$

$$\underline{\text{أو}} \quad b^2 - 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 12$$

نعوض في معادلة (2)

$$a^2 = b^2 + 4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$a^2 = 12 + 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

مثال 11 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته  $y^2 + 8x = 0$  علماً أن القطع الناقص يمر بالنقطة  $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

\* نستفيد من معادلة المكافئ لنجد P

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$$

$$F(-2, 0)$$

أحدى بؤرتيه	هي	بؤرة القطع المكافئ
$c$	$=$	$P$
ناقص		مكافئ
$c = 2$		

أنظر الى النقطة  $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$  نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

$$\left[ \frac{12}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$12b^2 + 3a^2 = a^2 \cdot b^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + 2^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 4 \quad \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1)

$$12b^2 + 3(\underbrace{b^2}_{a^2} + 4) = (\underbrace{b^2}_{a^2} + 4) \cdot b^2$$

**ملاحظة ومثال** إذا طلب في السؤال معادلة القطع الناقص وأعطى نقطتين  $P_1(x, y)$   $P_2(x, y)$  نستفيد مباشرة من المعادلة القياسية.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ أو } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ حسب موقع البؤرة ونحوض النقطتين مرتين.}$$

نجد (2) أو (3)

$$36b^2 + 64a^2 = 4a^2b^2$$

$$\pm 36b^2 \pm 4a^2 = \pm a^2b^2$$

$$[60a^2 = 3a^2b^2] \div a^2 \quad a^2 \neq 0$$

$$[60 = 3b^2] \div 3 \Rightarrow b^2 = 20$$

نعوض في معادلة (1)

$$9b^2 + 16a^2 = a^2b^2$$

$$9(20) + 16a^2 = a^2(20)$$

$$180 + 16a^2 = 20a^2$$

$$180 = 20a^2 - 16a^2 \Rightarrow [180 = 4a^2] \div 4$$

$$a^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$$

**مثال 12** جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وبؤراته على محور السينات ويهرب بالنقطتين  $(3, 4)$  ,  $(6, 2)$ .

$$\frac{(3)^2}{a^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{matrix} \text{(البؤرة على محور} \\ \text{السينات)} \end{matrix}$$

$$\left[ \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$9b^2 + 16a^2 = a^2b^2 \dots\dots(1)$$

$$\frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{matrix} \text{(x, y)} \\ \text{ونعوض (6, 2)} \end{matrix}$$

$$\left[ \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \right] \cdot a^2 \cdot b^2$$

$$36b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \dots\dots(2)$$

نضرب المعادلة (1) في 4 لنساوي معامل  $b^2$  ونحل بالحذف (الطرح)

$$36b^2 + 64a^2 = 4a^2b^2 \dots\dots(3)$$

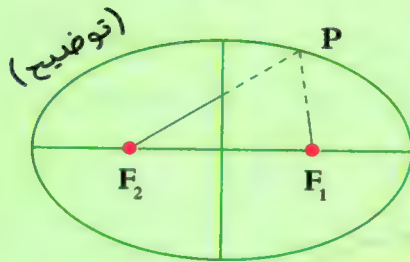


**ملاحظة ومثال** إذا أعطى المحيط بين النقاط  $QF_1 F_2$  أي المحيط للمثلث المتكون من

البؤرتين  $F_1, F_2$  ونقطة ثالثة على القطع يكون الحل كما يلي:

$$QF_1 F_2 = \frac{QF_1 + F_2}{2a} + \frac{F_1 F_2}{2c} \Rightarrow 2a + 2c = (\text{المحيط})$$

ونكون معادلة رقم (1) ونكمل الحل ← تابع المثال التالي:



$$PF_1 + PF_2 + F_1 F_2 = 16$$

$$[2a + 2c = 16] \div 2$$

$$a + c = 8 \Rightarrow c = 8 - a \dots\dots\dots (1)$$

$$y^2 = 16x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$$

$$2b = 2P$$

المحور الصغير طول

البعد بين بؤرة ودليل القطع المكافئ

$$b = P \Rightarrow b = 4 \text{ للناقص}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (8 - a)^2$$

$$a^2 = 16 + 64 - 16a + a^2$$

$$[16a = 80] \div 16 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**مثال 13** جد معادلة القطع الناقص الذي

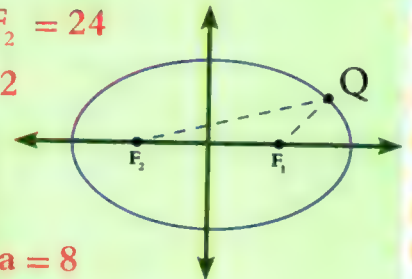
بؤرتيه  $F_1 (4, 0), F_2 (-4, 0)$  والنقطة تنتهي للقطع الناقص Q بحيث ان محيط المثلث  $QF_1 F_2$  يساوي (24) وحدة.

$$QF_1 + QF_2 + F_1 F_2 = 24$$

$$[2a + 2c = 24] \div 2$$

$$a + c = 12$$

$$a + 4 = 12 \Rightarrow a = 8$$



نجد b من القانون العام

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{64 - 16}$$

$$b = \sqrt{48} \Rightarrow b^2 = 48$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

**مثال 14** قطع ناقص فيه النقطة P تنتهي

للقطع بحيث ان محيط المثلث  $PF_1 F_2$  يساوي (16) وحدة جد معادلة القطع الناقص إذا علمت أن طول محوره الصغير يساوي البعد بين بؤرتيه ودليل القطع المكافئ  $y^2 = 16x$  علمت ان القطع على محور السينات (إضافي).

إذا قال في السؤال ان القطع الناقص يقطع من محور (جزءاً) طوله ( )  
فان هذا الجزء المقطوع إما  $2a$  أو  $2b$  تابع المثال التالي:

$2a$  ← الجزء الأكبر  
 $2b$  ← الجزء الأصغر  
والقطع يقع على المحور الأكبر

ملاحظة ومثال

جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات  
ومن محور الصادات جزءاً طوله (12) وحدة. ثم جد المسافة بين البؤرتين والمساحة  
والمحيط.

مثال 15

$2b = 8$  الأصغر  $b = 4$

$2a = 12$  الأكبر  $a = 6$  (صادات)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 4} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$$

$$2 \times 2\sqrt{5} = 2c \text{ المسافة بين البؤرتين}$$

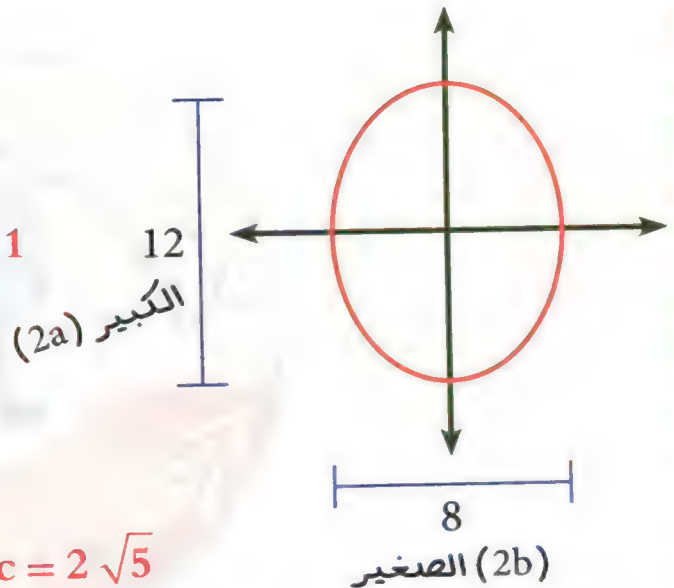
$$4\sqrt{5} = \text{وحدة طول}$$

$$A = a \cdot b\pi$$

$$A = (6)(4)\pi \Rightarrow A = 24\pi \text{ unit}^2$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{36 + 16}{2}} = 2\pi \sqrt{\frac{52}{2}} = 2\pi \sqrt{26} \text{ unit}$$





ملاحظة ومثال

عندما يعطي في السؤال بعدي إحدى البؤرتين عن الرأسين بشكل عددين فإن الحل يكون:

$$\left. \begin{array}{l} 2a = \text{مجموع البعدين} \\ 2c = \text{حاصل طرح البعدين} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{من القانون العام نجد (b)} \\ \text{ثم معادلة القطع الناقص} \end{array}$$

مثال 16

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5, 1 على الترتيب.

مجموع البعدين

$$2a = 5 + 1 \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$$a = 3$$

حاصل طرح البعدين

$$2c = 5 - 1 \Rightarrow [2c = 4] \div 2$$

$$c = 2$$

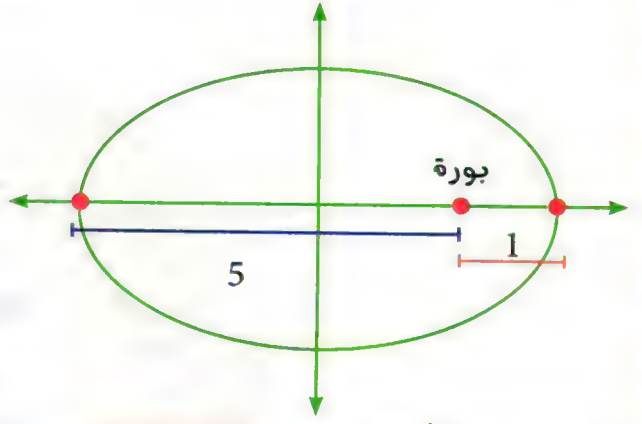
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} \Rightarrow b^2 = 5$$

لم يحدد موقع البؤرة لذلك نأخذ احتماليين

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{السينات}$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{الصادات}$$



((الرسم افتراضي))  
من الممكن رسمه على محور الصادات

ملاحظة

ربما يتسائل الطالب الملاحظة تقول ((إذا أعطى بعدي إحدى البؤرتين عن الرأسين)) والسؤال أعطى بعد إحدى البؤرتين عن نهايتي محوره الكبير!

لذلك:

((نفس المعنى كلا التعبيرين))

ملاحظة ومثال

إذا أعطى السؤال معادلة قطع تحتوي على ثابت مجهول  $h, k \in \mathbb{R}$  مثلاً:

أولاً: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهول واحد فقط نستفاد من معادلة القطع لنجد  $a^2$  أو  $b^2$  ونستخدم القانون العام  $a^2 = b^2 + c^2 \leftarrow$  تابع الأمثلة الآتية:

$\therefore c = \sqrt{3}$  ((للقص))

$[4x^2 + hy^2 = h] \div h$

$\frac{x^2}{\frac{h}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$

القطع على محور السينات من بؤرة القطع المكافئ  $(\sqrt{3}, 0)$  لذلك

$\frac{h}{4} = a^2, \quad 1 = b^2, \quad c = \sqrt{3}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{h}{4} = 1 + (\sqrt{3})^2$

$\frac{h}{4} = 1 + 3 \Rightarrow \frac{h}{4} = \frac{4}{1}$

$h = 16$

مثال 17 لتكن  $kx^2 + 4y^2 = 36$  معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه  $(\sqrt{3}, 0)$  جد قيمة  $k \in \mathbb{R}$

$[kx^2 + 4y^2 = 36] \div 36$

$\frac{kx^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$

لأن البؤرة على محور السينات

إذن  $c = \sqrt{3}, \quad b^2 = 9, \quad \frac{36}{k} = a^2 \leftarrow$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{36}{k} = 9 + (\sqrt{3})^2$

$\frac{36}{k} = 9 + 3 \Rightarrow \frac{36}{k} = 12 \Rightarrow k = \frac{36}{12} \Rightarrow k = 3$

مثال 18 قطع ناقص معادلته  $4x^2 + hy^2 - h = 0$  إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  جد قيمة  $h \in \mathbb{R}$  ((سؤال إضافي)).

من معادلة القطع المكافئ نجد P

$y^2 = 4\sqrt{3}x$

$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4\sqrt{3}] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$

$F(\sqrt{3}, 0)$



ثانياً: إذا كانت المعادلة تحتوي مجهولين فلا نستفيد منها بشي، فقط نجعلها بالشكل القياسي بعد اتمام السؤال وبالمقارنة مع المعادلة التي سوف نستخرجها نجد المجهيل ← تابع المثال التالي:

مثال 19

قطر ناقص معادلته  $hx^2 + ky^2 = 36$  مركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طوليه محوريه يساوي (60) وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته  $y^2 = 4\sqrt{3}x$   $h, k \in \mathbb{R}$  جد قيمة

$$15 - b^2 = b^2 + 3$$

$$15 - 3 = b^2 + b^2 \Rightarrow [12 = 2b^2] \div 2$$

نعوض في معادلة (1)  $b^2 = 6$

$$a^2 = 15 - b^2$$

$$a^2 = 15 - 6 \Rightarrow a^2 = 9$$

الآن نجد معادلة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

بعد ذلك نجعل معادلة المجاهيل بالشكل القياسي ثم نقارنها

$$\left[ \frac{hx^2}{36} + \frac{ky^2}{36} = \frac{36}{36} \right] \div 36$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة}} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$$

$$\frac{36}{h} = 9 \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow h = 4$$

$$\frac{36}{k} = 6 \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow k = 6$$

لأن معادلة القطع الناقص تحتوي مجهولين لا نستفيد منها لذلك من معلومات السؤال نجد معادلة القطع الناقص.

$$y^2 = 4\sqrt{3}x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 4\sqrt{3}] \div 4 \Rightarrow P = \sqrt{3}$$

$$F(\sqrt{3}, 0)$$

$$P = c \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

مكافئ ناقص

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$$

مجموع

طولي محوريه

$$[4a^2 + 4b^2 = 60] \div 4$$

$$a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 = 15 - b^2 \dots (1)$$

تعويض

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$15 - b^2 = b^2 + (\sqrt{3})^2$$

باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم:

$a$  - بؤرتاه النقطتان  $(0, \pm 2)$  ورأساه  $(0, \pm 3)$  ومركزه نقطة الأصل.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+0)^2 + (y+2)^2} = 6 \quad \text{التعويض}$$

(تحويل الجذر للطرف الاخر)

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} + x^2 + y^2 + 4y + 4$$

$$[12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 36 + 8y] \div 4$$

$$3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4} = 9 + 2y \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 81 + 36y + 4y^2$$

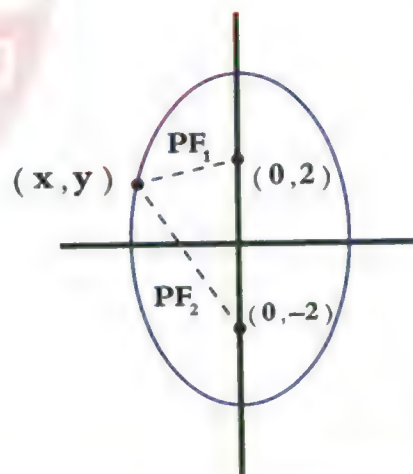
$$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 81 + 36y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 - 4y^2 = 81 - 36$$

$$[9x^2 + 5y^2 = 45] \div 45$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

معادلة القطع الناقص



توضيح

$$a = 3 \Rightarrow 2a = 6$$

$$P(x, y) \begin{cases} \xrightarrow{PF_1} F_1(x_1, y_1) (0, 2) \\ \xrightarrow{PF_2} F_2(x_1, y_1) (0, -2) \end{cases}$$

زوروا موقعنا للمزيد

WWW.IQ-RES.COM





b- باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علمت ان المسافة بين بؤرتيه 6 وحدات والعدد الثابت = 10 والبؤرتان تقعان على محور السينات .:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 10 \quad \text{التعويض}$$

التحويل (تحويل الجذر للطرف الاخر)

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

فتح التربيع داخل الجذر اعلاه

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

$$[20\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 100 + 12x] \div 4 \quad \text{وبتربيع الطرفين}$$

$$5\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 25 + 3x$$

$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 625 + 150x + 9x^2$$

$$25x^2 + 25y^2 - 9x^2 = 625 - 225$$

$$[16x^2 + 25y^2 = 400] \div 400$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

معادلة القطع الناقص

توضيح

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\text{العدد الثابت} \quad 2a = 10$$

$$P(x, y) \begin{cases} F_1 (3, 0) \\ F_2 (-3, 0) \end{cases}$$



## الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الناقص والربط بين القطعين المكافئ والناقص

$$\left[ \frac{25}{16} b^2 = b^2 + 9 \right] \cdot 16$$

$$25 b^2 = 16 b^2 + 144$$

$$25 b^2 - 16 b^2 = 144$$

$$\left[ 9 b^2 = 144 \right] \div 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a = \frac{5}{4} b \quad \text{نعوض في معادلة (1)}$$

$$a = \frac{5}{4} (4) \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**سؤال 2** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي (16) وحدة.

(2002 - د (1)

$$\left[ 2c = 8 \right] \div 2 \Rightarrow c = 4 \quad ((\text{سينات}))$$

$$\left[ 2a + 2b = 16 \right] \div 2 \Rightarrow a + b = 8$$

$$a = 8 - b \dots\dots (1)$$

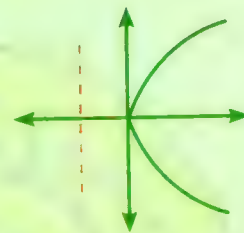
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(8 - b)^2 = b^2 + (4)^2$$

$$64 - 16b + b^2 = b^2 + 16$$

$$16b = 64 - 16$$

**سؤال 1** النقطة  $\left( \frac{1}{3}, 2 \right)$  تنتمي الى القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرتاه تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والنسبة بين طولي محوريه  $\left( \frac{5}{4} \right)$  جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.



(1995 - د (2)

القطع المكافئ:

الفتحة نحو اليمين لأن النقطة في الربع الأول والبؤرة على محور السينات.

$$y^2 = 4Px$$

$$(2)^2 = 4P\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4 = \frac{4P}{3} \Rightarrow P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$$

القطع الناقص:

$$\frac{P}{\text{مكافئ}} = \frac{C}{\text{ناقص}}$$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow [4a = 5b] \div 4$$

$$a = \frac{5}{4} b \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left( \frac{5}{4} b \right)^2 = b^2 + (3)^2$$



نستفيد من معادلة القطع المكافئ لنجد P

$$x^2 = 24y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6 \Rightarrow F(0, 6)$$

بؤرة المكافئ إحدى بؤرتي الناقص أي أن  
على محور الصادات  $c = 6$

$$2a - 2b = 4 \quad \text{الفرق بين طولي محوريه}$$

$$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2 + b)^2 = b^2 + (6)^2$$

$$4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$$

$$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$$

$$b = 8 \quad \text{نعويض}$$

$$a = 2 + b$$

$$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

سؤال 5 جد معادلة القطع الناقص الذي  
مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات  
والمسافة بين بؤرتيه تساوي (12) وحدة والفرق  
بين طولي محوريه يساوي (4) وحدات طول.

$$[2c = 12] \div 2 \Rightarrow c = 6$$

2006  
تمهيد

$$[2a - 2b = 4] \div 2$$

$$a - b = 2 \Rightarrow a = 2 + b \dots\dots\dots (1)$$

$$[16b = 48] \div 16 \Rightarrow b = 3$$

$$a = 8 - b \Rightarrow a = 8 - 3$$

$$a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

سؤال 3 قطع ناقص معادلته  
 $x^2 + 4y^2 = 4$  جد طول محوريه واحداثي  
راسيه وبؤريته.

$$[x^2 + 4y^2 = 4] \div 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$$

2003 - د (1)

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{4 - 1} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

طول المحور الكبير  $4 = 2 \times 2 = (2a)$  وحدة

طول المحور الصغير  $2 = 2 \times 1 = (2b)$  وحدة

الراسات  $V_1(a, 0), V_2(-a, 0)$

$V_1(2, 0), V_2(-2, 0)$

البؤرتان  $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$

$F_1(\sqrt{3}, 0), F_2(-\sqrt{3}, 0)$

سؤال 4 جد معادلة القطع الناقص الذي

مركزه نقطة الأصل وإحدى

بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$x^2 = 24y$  والفرق بين طولي

محوريه ليساوي (4) وحدات.

سؤال 4

2004 - د (1)

2015 - د (2)

خارج القطر

$$\therefore c = 3$$

$$[2b = 10] \div 2 \Rightarrow b = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow a^2 = 25 + 9$$

$$a^2 = 34$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$

**سؤال 7** جد معادلة القطع الناقص

الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرته القطع المكافئ  $y^2 = -8x$  وطول محوره الكبير ثلاث امثال طول محوره الصغير.

$$y^2 = -8x$$

2010  
تمهيد

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4 \Rightarrow P = 2$$

$$F(-2, 0) \quad ((\text{سينات}))$$

$$[2a = 3(2b)] \div 2$$

$$a = 3b \dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(3b)^2 = b^2 + 4 \Rightarrow 9b^2 = b^2 + 4$$

$$9b^2 - b^2 = 4 \Rightarrow [8b^2 = 4] \div 8$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = 3b \Rightarrow a = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(2+b)^2 = b^2 + (6)^2$$

$$4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$$

$$4b = 36 - 4 \Rightarrow [4b = 32] \div 4$$

$$b = 8$$

$$a = 2 + b$$

$$a = 2 + 8 \Rightarrow a = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

**سؤال 6** لتكن  $y^2 + 12x = 0$ ,  $y^2 - 12x = 0$

معادلتين قطعيتين مكافئتين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤراته هما بؤرتي القطعتين المكافئتين وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات طول.

2005 - د (2)

القطع المكافئ:

$$y^2 - 12x = 0$$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

البؤرة  $F(3, 0)$

معادلة الدليل  $x = -3$

$$y^2 + 12x = 0$$

$$y^2 = -12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4 \Rightarrow P = 3$$

البؤرة  $F(-3, 0)$

معادلة الدليل  $x = +3$

القطع الناقص:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

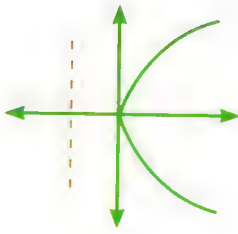
$$F_1(3, 0), F_2(-3, 0)$$

بؤراته هما



**سؤال 9** قطع ناقص رأساه  $(\pm 5, 0)$  وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والمار دليله بالنقطة  $(-3, 4)$  جد معادلة القطعين المكافئ والناقص.

2012  
خارج القطر



القطع المكافئ:

القطعان على محور السينات.

$$y^2 = 4Px \quad P = 3$$

$$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x \quad \text{معادلة القطع المكافئ}$$

القطع الناقص:

بؤرة القطع المكافئ والتي هي  $F(3, 0) \rightarrow$  إحدى بؤرتي الناقص رأساه  $(\pm 5, 0)$

$$c = 3 \quad a = 5 \quad b = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**سؤال 8** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوره على المحورين الاجداثيين ويبر من بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 16x = 0$  ومساحة منطقة القطع الناقص  $20\pi$  وحدة مساحة.

$$y^2 = 16x$$

(2010 - د 1)

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4$$

البؤرة  $F(4, 0)$

القطع الناقص:

$$\begin{matrix} \text{أما} \\ a = 4 \\ \text{أو} \\ b = 4 \end{matrix}$$

يبر من بؤرة المكافئ  $F(4, 0)$

$$A = ab\pi$$

$$20\pi = a \cdot b \pi \Rightarrow 20 = a \cdot b \quad \dots (1)$$

يوجد لدينا احتمالين:

الأول:  $a = 4$  نعوض بمعادلة (1)

$$[20 = 4b] \div 4 \Rightarrow b = 5$$

هذا الاحتمال يُهمل لأن فيه  $a$  اصغر من  $b$  وهذا لا يمكن في القطع الناقص.

الثاني:  $b = 4$

$$[20 = 4a] \div 4 \Rightarrow a = 5$$

هذا الاحتمال صحيح لأن  $a$  أكبر من  $b$ .

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ملاحظة

القطع على محور الصادات لأن البؤرة  $F(4, 0)$  التي مر بها القطع أصبحت  $b$  أي انها قطب وبها ان القطب سيني فالقطع صادي لأن البؤرة عكس القطب.

سؤال 11

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومساحة منطفته  $24\pi$  وحدة مساحة.

2012 - د (2)

الجزء المقطوع من محور السينات

أما  $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

أو  $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$A = a \cdot b\pi$

$24\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow a \cdot b = 24$

نعوض أولاً  $a = 4$

$[4b = 24] \div 4 \Rightarrow b = 6$  يُهمل

لأن  $b < a$  أصغر  
ثم نعوض  $b = 4$

$[4a = 24] \div 4 \Rightarrow a = 6$  o.k

$a > b$  أكبر

$a = 6, b = 4$

القطع على محور الصادات لأن الجزء المقطوع منه محور السينات اصبح يمثل (2b) أي محور القطب.

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

سؤال 10

جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طولي محوريه 1 : 2 ويقطع القطع المكافئ  $y^2 = 8x$  عند  $x = 2$

2013

خارج القطر

$y^2 = 8x$

بالجذر  $y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16$

$y = \pm 4 \quad (2, 4), (2, -4)$

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \dots\dots (1)$

لأن لدينا (x, y) نستفيد من معادلة القطع الناقص القياسية.

نعوض (2, 4)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(2)^2}{(2b)^2} + \frac{(4)^2}{b^2} = 1$

$\frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = \frac{1}{1} \Rightarrow b^2 = 17$

$b = \sqrt{17} \Rightarrow a = 2b$

$a = 2\sqrt{17} \Rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$





سؤال 12

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $y^2 - 12x = 0$  وطول محوره الصغير يساوي (8) وحدات.

$$[2b = 8] \div 2 \Rightarrow b = 4$$

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3 \rightarrow F(3, 0)$$

إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ

$$\frac{P}{\text{مكافئ}} = \frac{c}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = (4)^2 + (3)^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 13

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتهي لمحور الصادات ومساحته  $(32\pi)$  وحدة مساحة والنسبة بين طولي محوريه كنسبة  $\frac{1}{2}$ .

$$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \dots (1) \quad (2015 - د)$$

نعوض معادلة (1) هنا  $A = a \cdot b\pi$

$$32\pi = a \cdot b\pi$$

$$32 = (2b)(b) \Rightarrow [2b^2 = 32] \div 2$$

$$b^2 = 16$$

بالجذر

$$b = 4 \quad \text{نعوض معادلة (1)}$$

$$a = 2(b) = 2(4) \Rightarrow a = 8$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

سؤال 13 جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $x^2 - 16y = 0$  وطول محوره الكبير = 12 وحدة.

$$x^2 - 16y = 0 \Rightarrow x^2 = 16y$$

2016 تمهيدي

$$x^2 = 4Py$$

$$[4P = 16] \div 4 \Rightarrow P = 4 \quad F(0, 4)$$

للقص  $c = 4$

$$[2a = 12] \div 2 \Rightarrow a = 6$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{6^2 - 4^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$$

$$b^2 = 20$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

سؤال 15

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبعده البؤري مساوياً لبعده بؤرة القطع المكافئ  $y^2 + 24x = 0$  عن دليله إذا علمت ان مساحة القطع الناقص تساوي  $80\pi \text{ cm}^2$ .

2016 - د (1)

$$y^2 = -24x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 24] \div 4$$

$$P = 6$$

البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليله  $2P$

$$\begin{array}{ccc} 2c & = & 2P \\ \text{بعده البؤري} & & \text{لبعد بؤرة القطع المكافئ عن دليله} \\ & \downarrow & \\ & \text{مساوياً} & \end{array}$$

$$\therefore c = P \Rightarrow \boxed{c = 6} \text{ (للقص)}$$

$$A = a \cdot b\pi$$

$$80\pi = a \cdot b\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a} \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(\frac{80}{a}\right)^2 + (6)^2$$

$$\left[a^2 = \frac{6400}{a^2} + 36\right] \cdot a^2$$

$$a^4 = 6400 + 36a^2$$

$$a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$$

$$(a^2 + 64)(a^2 - 100) = 0$$

$$\text{أما } a^2 + 64 = 0 \notin \mathbb{R}$$

$$\text{أو } a^2 - 100 = 0 \Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$$

$$b = \frac{80}{a} = \frac{80}{10} \Rightarrow b = 8$$

لم يحدد بؤرة القطع

**إنتبه!** على الرغم ان القطع المكافئ على محور السينات إلا ان لم يحدد موقع البؤرة وانها اطوال فقط.

فقال  $2c = 2P$  وهذا لا يعني انها يقعان على نفس المحور.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

**سؤال 16** إذا كان  $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$  جد

معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه

$(0, d)$  وطول محوره الكبير يساوي  $2\|e + di\|$

2014

نازحين

2016

نازحين

$$e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$e + id = \frac{4+4i+2i-2}{(1)^1 + (1)^2} = \frac{2+6i}{2}$$



قطح ناقص معادلته

سؤال 17

والبعد بين بؤرتيه  $4x^2 + 2y^2 = k$

$2\sqrt{3}$  وحدة طول جد قيمه  $k$ .

$$[4x^2 + 2y^2 = k] \div k \quad (2008 - د 1)$$

$$\frac{4x^2}{k} + \frac{2y^2}{k} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$$

$$[2c = 2\sqrt{3}] \div 2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

أكبر من  $\frac{k}{4}$  ((كلها صغر البقام كبر الكسر))

((القطح صادي)) لأن الكبير  $\frac{k}{2}$  يفح على محور (y)

$$a^2 = \frac{k}{2}, b^2 = \frac{k}{4}, c = \sqrt{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + (\sqrt{3})^2$$

$$[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3] \cdot 4$$

$$2k = k + 12$$

$$2k - k = 12 \Rightarrow k = 12$$

$$e + di = 1 + 3i \Rightarrow e = 1$$

$$d = 3$$

إحدى بؤرتي القطح الناقص  $(0, d) = (0, 3)$

$$r = |le + d| = \sqrt{e^2 + d^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$$

$$2a = 2\sqrt{10} \Rightarrow a = \sqrt{10} \Rightarrow a^2 = 10$$

$$c = 3, a = \sqrt{10}, b = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{10 - 9} = \sqrt{1}$$

$$b = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{10} = 1$$

الصبر مفتاح الفرج  
WWW.IQ-RES.COM

سؤال 18

إذا كان  $ky^2 + 3x^2 = z$  معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتمي إلى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم  $8x + y = \sqrt{3}$  مع المحور الصادي علماً أن مساحة القطع  $2\sqrt{3}\pi$  وحدة مساحة جد  $k, z \in \mathbb{R}$ .

$2x + y = \sqrt{3} \quad x = 0$  ((نقطة التقاطع مع محور الصادات))

(2010 - د 2)

$2(0) + y = \sqrt{3}$

$y = \sqrt{3} \quad (0, \sqrt{3}) \rightarrow y$  هذه النقطة تمثل القطب لأنها على محور

$b = \sqrt{3}$  والبؤرة على محور  $X$  أي أن

$A = a \cdot b\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = a(\sqrt{3})\pi \Rightarrow a = 2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

$[ky^2 + 3x^2 = z] \div z \Rightarrow \left(\frac{3x^2}{z}\right) + \left(\frac{ky^2}{z}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{z}{3}} + \frac{y^2}{\frac{z}{k}} = 1$   
 $a^2 = \frac{z}{3} \quad b^2 = \frac{z}{k}$

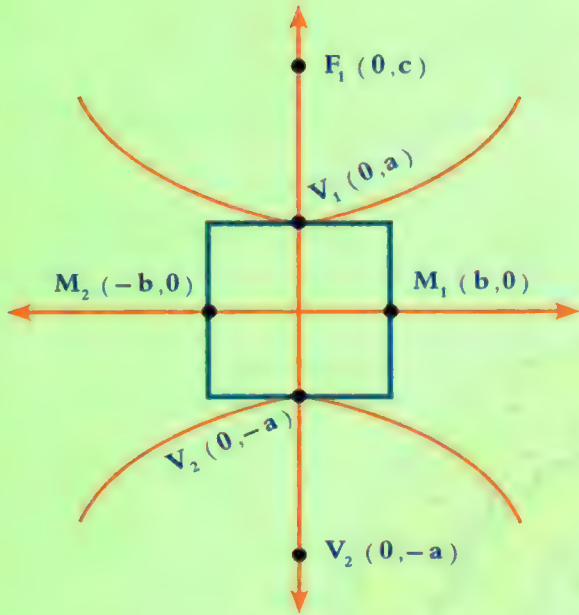
$\frac{z}{3} = a^2 \Rightarrow \frac{z}{3} = 4 \Rightarrow \boxed{z = 12}$

$\frac{z}{k} = b^2 \Rightarrow \frac{12}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{k = 4}$



## القطع الزائد

**تعريف:** هو مجموعة من النقط في المستوى التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتين ((البؤرتان)) يساوي عدداً ثابتاً.



قطع زائد بؤرتاه على محور الصادات

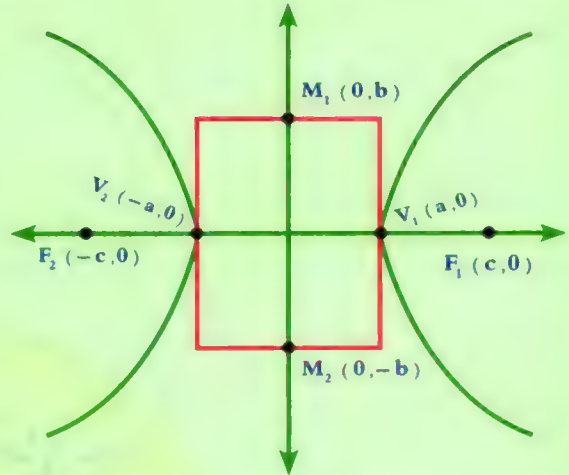
$F_1(0, c)$   
 $F_2(0, -c)$  البؤرتان

$V_1(0, a)$   
 $V_2(0, -a)$  الرأسان

$M_1(0, b)$   
 $M_2(0, -b)$  القطبان

المعادلة القياسية:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



قطع زائد بؤرتاه على محور السينات

$F_1(c, 0)$   
 $F_2(-c, 0)$  البؤرتان

$V_1(a, 0)$   
 $V_2(-a, 0)$  الرأسان

$M_1(0, b)$   
 $M_2(0, -b)$  القطبان

\* النقطتان  $(0, b) - (0, -b)$  سوف نسميها القطبان فقط للتوضيح لم يطلق عليها اسم اقطاب في المنهج.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

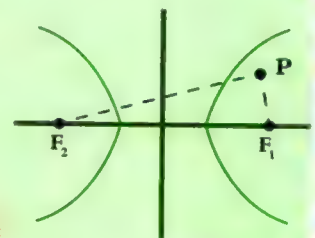
المعادلة القياسية:

يُسمى نصف القطر البؤري الايمن  $PF_1$

يُسمى نصف القطر البؤري الايسر  $PF_2$

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$PF_1 - PF_2$  / القيمة المطلقة للفرق بين بعدي اي نقطة عن بؤرتيه.





## ملاحظات

أولاً: مصطلحات القطع الزائد:

- $2a$  = طول المحور الحقيقي أو العدد الثابت أو البعد بين الرأسين .  
 $2b$  = طول المحور المرافق ((التخيلي)) وهو عمودي المحور الحقيقي .  
 $2c$  = البعد بين البؤرتين .

ثانياً: في القطع الزائد  $\begin{pmatrix} a & \text{أكبر } c \\ b & \text{أكبر } c \end{pmatrix}$  دائماً وقد تكون  $a = b$  أو  $a$  أكبر  $b$  أو  $a$  أصغر  $b$

ثالثاً: لاحظ المعادلة القياسية:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الصادات السينات

دائماً أول رقم يمثل  $a^2$  والثاني  $(b^2)$  لا يتغير.

رابعاً: لا يوجد قانون للمساحة والمحيط في القطع الزائد.

خامساً: الاختلاف المركزي ( $e$ ) أكبر من (1) لذلك ان وجدت اختلاف مركزي أكبر من (1) هذا قطع زائد حتى وإن لم يذكر نوع القطع.

سادساً: في القطع الزائد:

- كل كلمة يمر  $(x, 0)$  أو  $(0, y)$  يعني هذا  $(a)$
- كل يمر هذه  $a$
- كل يقطع عند رقم  $x = \pm$  ، رقم  $y = \pm$  هذا الرقم هو  $(a)$

سابعاً: القوانين:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c^2 - b^2} \\ b &= \sqrt{c^2 - a^2} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 \end{array} \right.$$

$$e = \frac{c}{a} \quad \text{الاختلاف المركزي}$$



## العلاقات بين القطوع

تعلم كيف نحدد العلاقة بين القطوع من خلال الأمثلة التوضيحية الآتية:

(1) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه // هي بؤرتة القطع المكافئ

$$P = C$$

مكافئ ناقص

معناها  
علامة يساوي

(2) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه // هما بؤرتا القطع الناقص

$$C = a$$

ناقص زائد

(3) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنطبقان // على بؤرتي القطع الزائد

$$C = C$$

ناقص زائد

معناها  
علامة يساوي

(4) لو قال في السؤال مثلاً:

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد قطباه // هو رأس القطع الزائد

$$a = b$$

ناقص زائد

معناها  
علامة يساوي

(5) عبارة قطعان زائد وناقص كل منهما يمر ببؤرة الآخر معناها:

\* عندما يذكر عبارة قطع زائد قائم معناها

طول المحور الحقيقي = طول المحور المرافق

$$e = \sqrt{2} \quad \text{وأن} \quad 2a = 2b \Rightarrow a = b$$

$$C = a$$

ناقص زائد

$$C = a$$

ناقص زائد

راجع السؤال الخامس والثامن  
عشر في الاسئلة الوزارية

## مقارنة بين القطع الناقص والزائد

القطع الزائد	القطع الناقص
أولاً: لا يوجد له مساحة ومحيط لذلك السؤال الذي فيه مساحة أو محيط ولم يذكر نوع القطع فهو ناقص.	أولاً: له مساحة ومحيط فكل سؤال يحوي مساحة ومحيط هذه القطع ناقص
ثانياً: الاختلاف المركزي أكبر من (1)	ثانياً: الاختلاف المركزي أصغر من (1)
ثالثاً: c أكبر من a, b	ثالثاً: a أكبر من b, c
رابعاً: المعادلة القياسية ذات إشارة سالبة $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	رابعاً: المعادلة القياسية ذات إشارة موجبة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
خامساً: المصطلحات: طول المحور الحقيقي = 2a طول المحور المرافق = 2b	خامساً: المصطلحات: طول المحور الكبير = 2a طول المحور الصغير = 2b
سادساً: يقطع محور واحد عند a	سادساً: يقطع المحورين عند a, b

### أمثلة توضيحية:

قطع مخروطي مساحته  $20\pi \text{ cm}^2$  ..... الخ ← القطع ناقص / فيه مساحة .

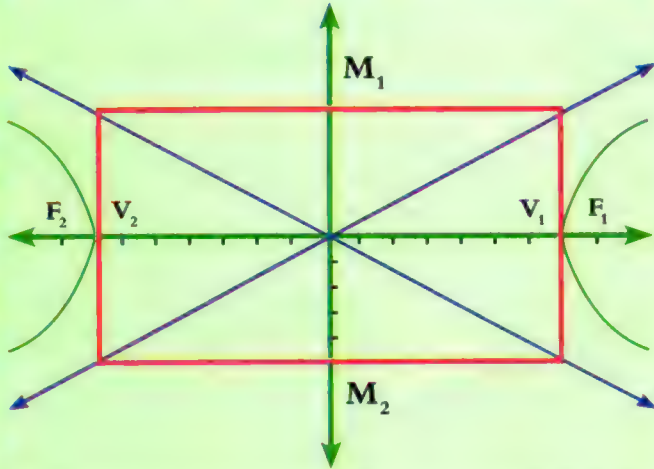
قطع مخروطي اختلافه المركزي 1.2 .... الخ ← القطع زائد / e أكبر من (1) .

قطع مخروطي رأسه (5, 0) وإحدى بؤرتيه (3, 0) ..... الخ / القطع ناقص /  $a > c$  أكبر

قطع مخروطي رأسه (10, 0) ويبر من (0, 6) ..... الخ / قطع ناقص يقطع المحورين a, b

قطع مخروطي طول محوره الحقيقي 12 وحدة ..... الخ / قطع زائد / من مصطلح محور حقيقي .





**مثال** عين البؤرتان والرأسان وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة التالية ثم ارسبها:

$$(1) \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$$

$$b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow c = 10$$

$$F_1(c, 0) \Rightarrow F_1(10, 0) \quad \text{البؤرتان: } (1)$$

$$F_2(-c, 0) \Rightarrow F_2(-10, 0)$$

$$(2) \text{الرأسان:}$$

$$V_1(a, 0) \Rightarrow V_1(8, 0)$$

$$V_2(-a, 0) \Rightarrow V_2(-8, 0)$$

$$(3) \text{طول المحور الحقيقي} = 2a = 16 \text{ وحدة}$$

$$(4) \text{طول المحور المرافق} = 2b = 12 \text{ وحدة}$$

$$(5) \text{الاختلاف المركزي:}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$(2) 12x^2 - 4y^2 = 48$$

$$[12x^2 - 4y^2 = 48] \div 48$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$(1) \text{البؤرتان:}$$

$$F_1(c, 0) \Rightarrow F_1(4, 0)$$

$$F_2(-c, 0) \Rightarrow F_2(-4, 0)$$

$$(2) \text{الرأسان:}$$

$$V_1(a, 0) \Rightarrow V_1(2, 0)$$

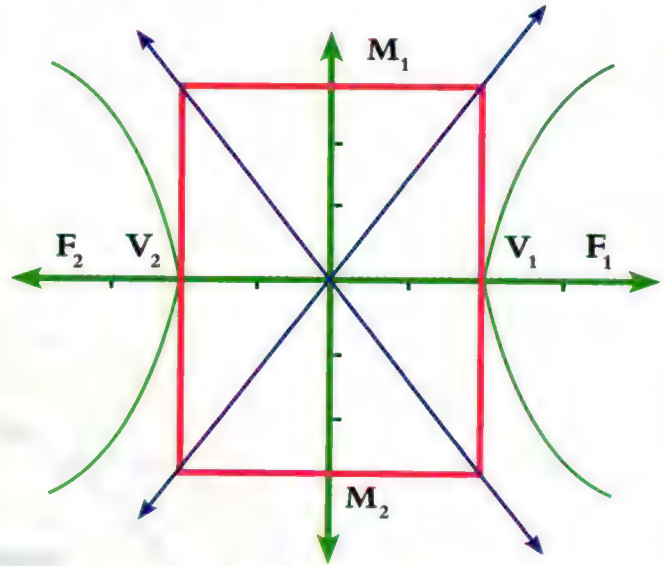
$$V_2(-a, 0) \Rightarrow V_2(-2, 0)$$

$$(3) \text{طول المحور الحقيقي} = 2a = 4 \text{ وحدة}$$

$$(4) \text{طول المحور المرافق} = 2b = 4\sqrt{3} \text{ وحدة}$$

5 الاختلاف المركزي:  $e = \frac{c}{a}$

$e = \frac{4}{2} = 2 > 1$



3  $[16x^2 - 9y^2 = 144] \div 144$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

1 البؤرتان:

$F_1(c, 0) \Rightarrow F_1(5, 0)$

$F_2(-c, 0) \Rightarrow F_2(-5, 0)$

2 الرأسان:

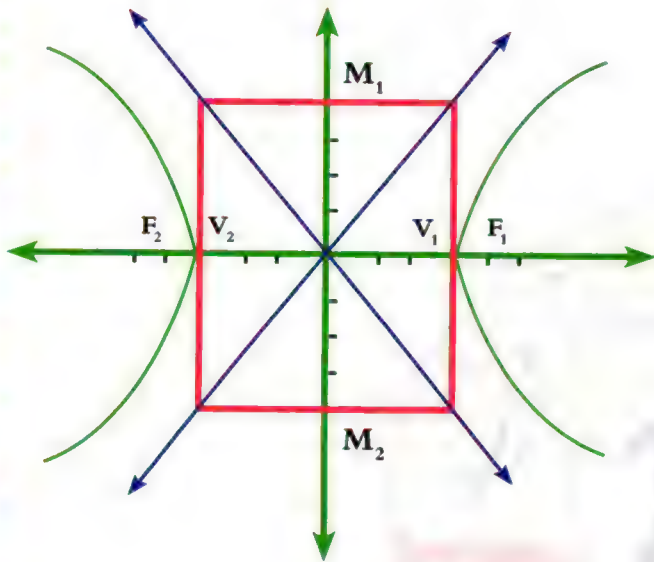
$V_1(a, 0) \Rightarrow V_1(3, 0)$

$V_2(-a, 0) \Rightarrow V_2(-3, 0)$

طول المحور الحقيقي  $\rightarrow$  وحدة  $2a = 2 \times 3 = 6$

طول المحور المرافق  $\rightarrow$  وحدة  $2b = 2 \times 4 = 8$

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$



طريقة رسم القطع الزائد:

1 نعين الرأسان  $V_1, V_2$

2 نعين النقطتين  $M_1, M_2$

3 هذه النقاط الاربعة تكون مستطيل اضلاعه  
توازي المحورين.

4 نرسم قطري المستطيل فهما يمثلان  
المحاذيات.

5 نعين البؤرتين  $F_1, F_2$  ثم نرسم ذراعي  
القطع.





ثانياً: اسئلة الدرجة الثانية والتي تحتاج الى معادلتين أنياً:

$$y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$$

القطع الزائد:

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

بؤرة القطع المكافئ	هي	إحدى بؤرتيه
<b>P</b>	=	<b>c</b>
مكافئ		زائد
		<b>c = 5</b>

$$\therefore c = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره المرافق (  $2\sqrt{2}$  ) وحدة واختلافه المركزي يساوي (3) ومركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الصادات.

$$2b = 2\sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$3 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 3a \quad (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{القانون العام}$$

$$(3a)^2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$9a^2 - a^2 = 2 \Rightarrow 8a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{2} = 1$$

مثال 6) وحدات وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبهر بالنقطتين (  $1, 2\sqrt{5}$  ) (  $1, -2\sqrt{5}$  ) جد معادلتين القطعين المكافئ والزائد.

ربع أول ربع رابع

$$(1, 2\sqrt{5}) (1, -2\sqrt{5})$$

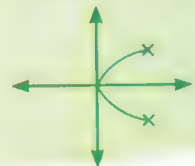
الفتحة يمين

القطع المكافئ:

$$y^2 = 4Px$$

$$(2\sqrt{5})^2 = 4P(1)$$

$$[20 = 4P] \div 4 \Rightarrow P = 5$$



تابعونا على التلي كرام

@IQRES





مثال 7

جد معادلة القطع الزائد الذي  
بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$   
ويمس دليل القطع المكافئ  $x^2 + 12y = 0$

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 + 12y = 0$$

$$x^2 = -12y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 12] \div 4$$

$$P = 3$$

القطع الزائد:

بؤرتاه	هما	بؤرتي القطع الناقص
$\frac{c}{\text{زائد}}$	$=$	$\frac{c}{\text{ناقص}}$

$$c = 4$$

$$a = P \Rightarrow a = 3$$

كل يمس هو (a)

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$b^2 = 7$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

مثال 8

جد معادلة القطع الناقص الذي  
بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد  $x^2 - 3y^2 = 12$   
والنسبة بين طولي محوريه  $\frac{5}{3}$  ومركزه  
نقطة الاصل

القطع الزائد:

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

القطع الناقص:

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$\frac{c}{\text{زائد}} = \frac{c}{\text{ناقص}}$$

$$c = 4$$

$$\frac{5}{3} = \frac{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{a}{a}$$

$$[3a = 5b] \div 5 \Rightarrow b = \frac{3}{5}a \dots\dots (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(\frac{3}{5}a\right)^2 + (4)^2$$

$$[a^2 = \frac{9}{25}a^2 + 16] \cdot 25$$

$$25a^2 - 9a^2 = 400 \Rightarrow 16a^2 = 400 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$[16a^2 = 400] \div 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$b = \frac{3}{5}a$$

نعوض المعادلة (1)

$$b = \frac{3}{5}(5) \Rightarrow b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



إذا أعطى البعد بين البؤرتين واحد الرأسين بالترتيب فإن:

ملاحظة ومثال

$$2c = \text{مجموع البعدين}$$

$$2a = \text{حاصل طرح البعدين}$$

مثال 9 أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت ان أحد الرأسين يبعد بالبعد 1، 9 وحدات بالترتيب عن البؤرتين وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين.

$$\text{المجموع } 9 + 1 = 2c \Rightarrow [2c = 10] \div 2$$

$$c = 5$$

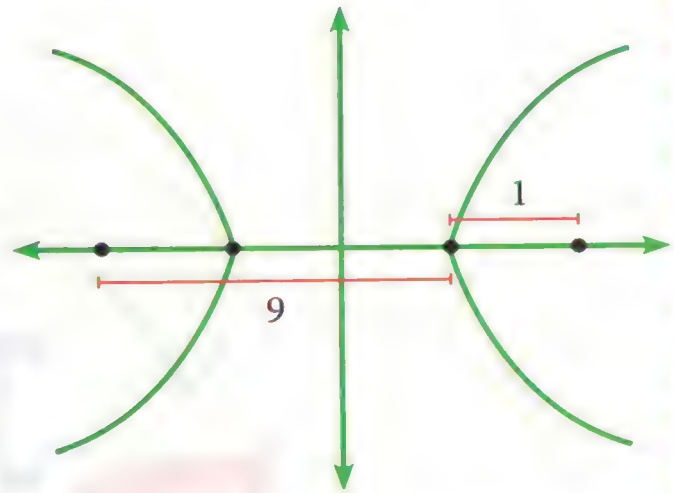
$$\text{الطرح } 9 - 1 = 2a \Rightarrow [2a = 8] \div 2$$

$$a = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$



رسم توضيحي تم اخذه على محور السينات

لم يحدد موقع البؤرة

$$\text{سينات } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\text{صادات } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$



WWW.IQ-RES.COM



@IQRES



/IQRES

موقع طلاب العراق



**ملاحظة ومثال** إذا أعطى إحداثي نقطة  $(x, y)$  أحد الإحداثيات مجهول نحوض النقطة بالمعادلة ونجد المجهول.

أما إذا طلب طول نصف القطر البؤري الأيمن  $PF_1$  وهو البعد بين النقطة والبؤرة الموجبة  $F_1$  والآخر نصف القطر البؤري الأيسر  $PF_2$  وهو البعد بين النقطة والبؤرة السالبة.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12 + 4$$

$$c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$F_1(4, 0) \quad , \quad P(6, 2\sqrt{2}) \quad (نقطة L)$$

$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{2})^2}$$

$$PF_1 = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12}$$

$$PF_1 = 2\sqrt{3} \quad \text{وحدة}$$

**مثال 10** النقطة  $P(6, L)$  تنتمي إلى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته  $x^2 - 3y^2 = 12$  جد:

**أولاً:** قيمة  $(L)$ .

النقطة  $P(6, L)$  تحقق معادلة القطع الزائد  $x, y$

$$x^2 - 3y^2 = 12$$

$$(6)^2 - 3L^2 = 12 \Rightarrow 36 - 3L^2 = 12$$

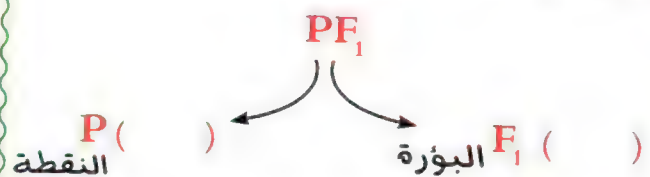
$$36 - 12 = 3L^2$$

$$[24 = 3L^2] \div 3$$

$$L^2 = 8 \quad \text{بالجذر}$$

$$L = \pm 2\sqrt{2}$$

**ثانياً:** نصف القطر البؤري الأيمن  $PF_1$  للقطع المرسوم من الجهة اليمنى للنقطة  $P$



نجد  $F_1$  أولاً ثم نجد المسافة بين  $F_1$  والنقطة  $P$

$$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12 \quad a^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad b^2 = 4$$

11

مثال 11 قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته  $hx^2 - ky^2 = 90$  وطول محوره الحقيقي وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته  $9x^2 + 16y^2 = 576$  جد قيمه  $h, k \in \mathbb{R}$ .

معادلة السؤال (التي تحوي مجاهيل)

$$[hx^2 - ky^2 = 90] \div 90$$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1$$

$$\frac{90}{h} = 18 \Rightarrow h = \frac{90}{18} \Rightarrow h = 5$$

$$\frac{90}{k} = 10 \Rightarrow k = \frac{90}{10} \Rightarrow k = 10$$

$$[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \quad \begin{matrix} a^2 = 64 \\ b^2 = 36 \end{matrix}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28}$$

$$c = 2\sqrt{7}$$

القطع الزائد:

$$\text{طول محوره الحقيقي} = 2a \Rightarrow [2a = 6\sqrt{2}] \div 2$$

$$a = 3\sqrt{2} \text{ زائد}$$

بؤرتاه	تنطبقان	على بؤرة القطع الناقص
$c$ زائد	=	$c$ ناقص

$$c = 2\sqrt{7} \text{ زائد}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{28 - 18}$$

$$b = \sqrt{10} \Rightarrow b^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1}$$



## ايجاد معادلة القطع الزائد باستخدام التعريف

أولاً : نجد البؤرة  $F_1$  والبؤرة  $F_2$

ثانياً : نستخدم قانون البعد بين نقطتين

$$PF_1$$

$$(x_2, y_2)$$

$$P(x, y)$$

$$F_1(c, 0)$$

$$(x_1, y_1)$$

$$PF_2$$

$$(x_2, y_2)$$

$$P(x, y)$$

$$F_2(-c, 0)$$

$$(x_1, y_1)$$

$$PF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

\* هناك عدة خطوات لحل السؤال :

القانون ← التعويض ← التحويل ← التربيع ← الارجاع ← التربيع ثم تصفية الطرفين

ارجاع الجذر  
الى الطرف الأيسر

تحويل أحد الجذرين  
إلى الطرف الأيمن



موقع طلاب العراق

مثال 12

باستخدام التعريف جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $(2, \sqrt{2}, 0)$  ,  $(-2\sqrt{2}, 0)$

وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين والقيمه المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه  $= 4$  وحدات .

$$\begin{array}{ll} (x_1, y_1) & (x, y) \\ F_1 (2\sqrt{2}, 0) & F_1 (2\sqrt{2}, 0) \\ F_2 (-2\sqrt{2}, 0) & F_2 (-2\sqrt{2}, 0) \end{array}$$

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right| = 2a \quad \text{القانون}$$

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + (y - 0)^2} = \pm 4 \quad \text{التعويض}$$

هذا الجذر يبقى      ننقل الجذر للطرف الاخر

$$\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2} \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2 + y^2} + (x + 2\sqrt{2})^2 + y^2$$

هذا الجذر حذف مع التربيع      هذا الطرف مربع حدانية

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 16 \pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 \quad \text{فتح القوس}$$

ارجاع الجذر الى الطرف الاصلي

$$\pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 16 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}x \quad \text{التصفية}$$

$$[\pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x] \div 8$$

$$\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = (2 + \sqrt{2}x) \quad \text{تربيع الطرفين}$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}x + 2x^2$$

$$2x^2 - x^2 - y^2 = 8 - 4 \Rightarrow [x^2 - y^2 = 4] \div 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$



الاسئلة الوزارية الخاصة بالقطع الزائد والربط بين القطوع الثلاثة

**سؤال 2** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص  $3x^2 + 5y^2 = 120$  والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة  $\frac{1}{2}$ .

(2001 - د 1)

القطع الناقص:  $\left[ \frac{3x^2}{120} + \frac{5y^2}{120} = \frac{120}{120} \right] \div 120$

$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$  .  $a^2 = 40$  .  $b^2 = 24$  ((سينات))

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$   
 $c = \sqrt{40 - 24} = \sqrt{16}$   
 $c = 4$

القطع الزائد:

$\frac{C}{\text{زائد}} = \frac{C}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 4$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 4] \div 2$   
 $a = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$   
 $b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$   
 $b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

**سؤال 1** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$  وأحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ  $y^2 + 8x = 0$ .

(1997 - د 2)

القطع الناقص:  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

$a^2 = 36$  .  $b^2 = 20$  ((سينات))

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$   
 $c = \sqrt{36 - 20} = \sqrt{16}$   
 $c = 4$

القطع المكافئ:

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$

القطع الزائد:  $\frac{C}{\text{زائد}} = \frac{C}{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 4$

$P = a \Rightarrow a = 2$   
 زائد مكافئ

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$   
 $b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$   
 $b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

**ملاحظة** حرف العطف (و) في اللغة العربية ((الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق)) تحمل وجهين:

$$2a - 2b = 2 \leftarrow \text{الأول}$$

$$2b - 2a = 2 \leftarrow \text{الثاني}$$

تم حل السؤال على الاحتمال الأول وسنتطرق الى الوجه الثاني من الحل.

$$[2b - 2a = 2] \div 2$$

$$b - a = 1 \Rightarrow b = 1 + a \dots\dots\dots (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(5)^2 = a^2 + (1 + a)^2$$

مربع حدانية

$$25 = a^2 + 1 + 2a + a^2$$

$$2a^2 + 2a - 24 = 0 \div 2$$

$$a^2 + a - 12 = 0$$

$$(a + 4)(a - 3) = 0$$

لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل  $a + 4 = 0$

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 1 + a = 1 + 3 = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

**سؤال 3** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين  $y^2 = -20x$ ,  $y^2 = 20x$  والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق يساوي (2) وحدة.

القطع المكافئ:

$$y^2 = 20x$$

$$y^2 = -20x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5, F(-5, 0)$$

القطع الزائد:

$$C = P \Rightarrow c = 5$$

مكافئ زائد

الفرق بين طولي محوريه الحقيقي والرافق

$$[2a - 2b = 2] \div 2$$

$$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \dots\dots\dots (1)$$

نعويض

$$c^2 = a^2 + b^2$$

مربع حدانية

$$(5)^2 = (1 + b)^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 1 + 2b + b^2 + b^2$$

$$2b^2 + 2b + 1 - 25 = 0$$

$$[2b^2 + 2b - 24 = 0] \div 2$$

$$b^2 + b - 12 = 0$$

$$(b + 4)(b - 3) = 0$$

لا يمكن ان تكون سالبة لذلك يُهمل  $b + 4 = 0$  أو

$$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \quad (1)$$

$$a = 1 + b = 1 + 3 \Rightarrow a = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



**سؤال 5** جد معادلة القطع الزائد الذي

يمر ببؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$  والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة  $\frac{5}{4}$ .

القطع الناقص:

$$a^2 = 49 \quad b^2 = 24 \quad ((\text{سينات}))$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{49 - 24} = \sqrt{25}$$

$$c = 5$$

القطع الزائد:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{b}$$

قال يمر وكل يمر a في القطع الزائد

$$a = 5$$

$$\frac{c}{b} = \frac{5}{4} \quad [4c = 5b] \div 4 \Rightarrow c = \frac{5}{4}b \quad \dots (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{5}{4}b\right)^2 = 5^2 + b^2$$

$$\left[\frac{25}{16}b^2 = 25 + b^2\right] \cdot 16 \Rightarrow 25b^2 = 400 + 16b^2$$

$$25b^2 - 16b^2 = 400 \Rightarrow 9b^2 = 400$$

$$b^2 = \frac{400}{9}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{\frac{400}{9}} = 1$$

**سؤال 4** جد معادلة القطع الزائد الذي

بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص  $x^2 + 9y^2 = 36$  والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي  $\left(\frac{1}{2}\right)$  وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين.

2002 - د (2)

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

القطع الزائد:

بؤرتاه	هما	رأسا القطع الناقص
$c$ زائد	$=$	$a$ ناقص

$$c = 6$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 6] \div 2$$

$$a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

$$b^2 = 27$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

**سؤال 7** جد معادلة القطع المخروطي

الذي محوره هـا المحورين الاحداثيين  
واحدى بؤرتيه  $(-5, 0)$  واحد رأسيه  $(3, 0)$ .

2004 - د (2) 2005 - تمهيدى 2006 - د (2) 2008 - د (2) 2014 - د (3)

$$c = 5 \rightarrow (-5, 0) \text{ البؤرة}$$

$$a = 3 \rightarrow (3, 0) \text{ الرأس}$$

$a < c$  «أصغر» أي ان القطع زائد

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} \Rightarrow b = 4$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

**سؤال 8** جد معادلة القطع الزائد الذي

احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم  
 $2x - y = 8$  مع محور السينات وطول  
محوره محوره التخيلي (4) وحدات.

2007  
تمهيدى

(نقطة التقاطع مع محور السينات)  $y = 0$

$$2x - 0 = 8 \Rightarrow [2x = 8] \div 2 \Rightarrow x = 4$$

$$(4, 0) \rightarrow c = 4$$

$$2b \Rightarrow [2b = 4] \div 2$$

$$b = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$a^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$

**سؤال 6** قطعان زائد ونافص كل

منهما يمر ببؤرة الاخر جد معادلة القطع  
الزائد اذا علمت ان معادلة القطع النافص  
هي  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  علماً ان محوريهما على  
المحورين الاحداثيين.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

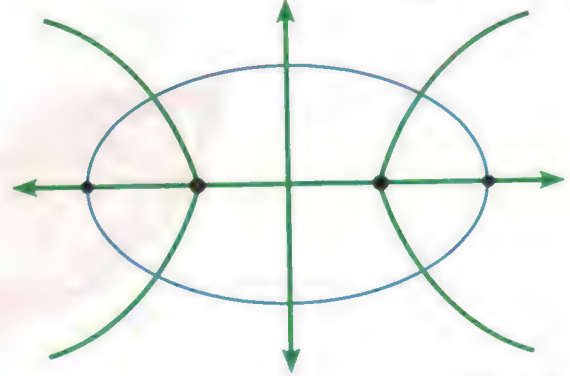
القطع النافص:

$$a^2 = 25 \rightarrow a = 5, b^2 = 9 \rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9}$$

$$c = \sqrt{16} \Rightarrow c = 4$$

رسم توضيحي



القطع الزائد:

$$a = c \Rightarrow a = 4 \text{ للزائد}$$

$$c = a \Rightarrow c = 5 \text{ للزائد}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3 \text{ للزائد}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



$$a^2 = 4, b^2 = 32, c = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

بالجذر

$$c^2 = 4 + 32 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6$$

القطع المكافئ:

$$y^2 = -16x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 16] \div 4$$

$$P = 4$$

القطع الناقص بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$c_{\text{زائد}} = c_{\text{ناقص}} \Rightarrow c = 6$$

$$P_{\text{مكافئ}} = b_{\text{ناقص}} \Rightarrow b = 4$$

\* كل بهس في القطع الناقص اما  $a$  او  $b$  هنا  
اصبحت  $b$  للسببين:

1 لأن  $a$  يجب ان تكون اكبر من  $c$  إذا  
اصبحت  $a = 4$  تكون أصغر من  $c$  وهي (6).

2 لأن البؤرة صادات والمكافئ سينات  
والذي يخالف البؤرة هو قطب  $b$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 4^2 + 6^2$$

$$a^2 = 16 + 36 \Rightarrow a^2 = 52$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$$

سؤال 9 جد معادلة القطع الزائد الذي  
بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين  
 $y^2 = 20x$  ,  $y^2 = -20x$  وطول محوره  
المرافق (8) وحدات.

2005 - د (1) 2008 - د (1) 2015 - د (4) رصافة

القطع المكافئ:

$$y^2 = 20x$$

$$y^2 = 4Px \Rightarrow [4P = 20] \div 4 \Rightarrow P = 5$$

$$F(5, 0)$$

$$y^2 = -20x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow 4P = 20 \div 4 \Rightarrow P = 5$$

$$F(-5, 0)$$

القطع الزائد:  $P = c \Rightarrow c = 5$

$$P = c \Rightarrow c = 5$$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$a = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

سؤال 10 جد معادلة القطع الناقص الذي

بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد

$$8y^2 - x^2 = 32$$

ويبس دليل  
القطع المكافئ  $y^2 + 16x = 0$ .

القطع الزائد:

$$[8y^2 - x^2 = 32] \div 32 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

**سؤال 12** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$  وطول محوره الحقيقي (12) وحدة وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين .

2007  
خارج القطر

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$$

$$V_1 (10, 0), V_2 (-10, 0)$$

القطع الزائد:

$$\frac{\text{رأسا القطع الناقص}}{a} = \frac{\text{القطع الزائد بؤرتاه هما}}{c}$$

$$c = 10 \quad \text{للزائد}$$

$$\text{طول محوره الحقيقي} = 2a \Rightarrow [2a = 12] \div 2$$

$$a = 6 \quad \text{للزائد}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{100 - 36}$$

$$b = \sqrt{64} \Rightarrow b = 8$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

**سؤال 11** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل والبعد بين بؤرتيه (8) وحدات ورأساه بؤرتا القطع الزائد  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2007 - د (1)

القطع الزائد:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9 \quad \text{سينات}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$$

القطع الناقص:

$$\frac{a}{\text{ناقص}} = \frac{c}{\text{زائد}} \Rightarrow a = 5$$

$$2c = 8 \Rightarrow [2c = 8] \div 2$$

$$c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9}$$

$$b = 3$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



**سؤال 14** جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد  $9y^2 - 16x^2 = 144$  ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 12 وحدة.

2009 - د (1)

القطع الزائد:

$$[9y^2 - 16x^2 = 144] \div 144$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad a^2 = 16, b^2 = 9$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25 \rightarrow c = 5 \rightarrow F_1 (0, 5), F_2 (0, -5)$$

القطع الناقص:

القطع الناقص يمر من بؤرة الزائد

(0, 5)

$$b = 5 \quad \text{أو} \quad a = 5$$

الجزء المقطوع يمر من محور السينات

$$[2a = 12] \div 2 \quad a = 6$$

$$[2b = 12] \div 2 \quad b = 6$$

الأكبر  $a = 6$  ← سينات

الأصغر  $b = 5$  ←

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

**سؤال 13** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي  $(\frac{1}{2})$

2008  
تمهيد

القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, a^2 = 25, b^2 = 9, c = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$
 للقطع الناقص

القطع الزائد:

بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص

ناقص  $c$

زائد  $c$

$$c = 4$$

$$\frac{\text{طول محوره الحقيقي}}{\text{البعد بين بؤرتيه}} = \frac{2a}{2c} \Rightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow [2a = 4] \div 2$$

$$a = 2$$
 للزائد

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

**سؤال 16** جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الأصل وينطبق محوره على المحورين الاحداثيين واختلافه المركزي يساوي (3) ويبر بالنقطة (0, 2).

2016  
تمهيدي

\* القطع زائد لأن  $e > 1$

الاختلاف المركزي أكبر من (1)

(رأس صادات)  $a = 2 \rightarrow (0, 2)$

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{2}$$

$$c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{36 - 4}$$

$$b = \sqrt{32} \Rightarrow b^2 = 32$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$$

قال الشاعر:

دع حب أو من كافت بحبه  
ما الحب إلا للحبیب الآخر  
ما قد تولد لا ارتجاع لطيبه  
هل غائب اللذات مثل الحاضر

**سؤال 15** جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص  $25x^2 + 9y^2 = 225$  وبمس دلييل القطع المكافئ الذي معادلته  $x^2 + 8y = 0$ .

2015 - د (3)

القطع الناقص:

$$[25x^2 + 9y^2 = 225] \div 225$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad a^2 = 25, b^2 = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$c = 4$$

القطع المكافئ:

$$x^2 = -8y$$

$$x^2 = -4Py \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:  $c = c \Rightarrow c = 4$   
ناقص زائد

$$P = a \Rightarrow a = 2$$

مكافئ زائد

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

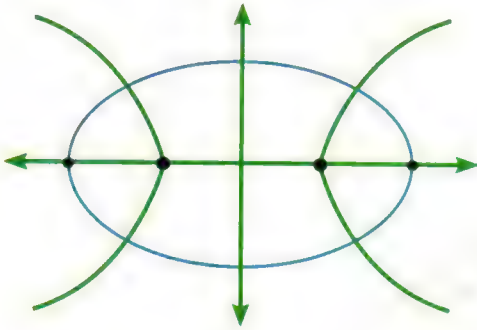
$$b = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$b^2 = 12$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$



**سؤال 18** جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كانت كل منهما يمر ببؤرتي الآخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي  $6\sqrt{2}$  وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي (6) وحدة طول.



القطع الزائد:  $[2a = 6] \div 2$

زائد  $a = 3$

القطع الناقص:  $[2a = 6\sqrt{2}] \div 2$

ناقص  $a = 3\sqrt{2}$

ناقص  $a = c \rightarrow c = 3$

زائد  $a = c \rightarrow c = 3\sqrt{2}$

الناقص	الزائد
$b = \sqrt{a^2 - c^2}$	$b = \sqrt{c^2 - a^2}$
$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$	$b = \sqrt{18 - 9} = \sqrt{9}$
$b = 3$	$b = 3$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

**سؤال 17** جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور السينات ومجموع طولي محوريه يساوي (18) وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد  $x^2 - 2y^2 = 6$ .

القطع الزائد:  $[x^2 - 2y^2 = 6] \div 6$

2014  
نازحين

$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$  ,  $a^2 = 6, b^2 = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 6 + 3$

$c^2 = 9 \rightarrow c = 3$

ناقص  $c = c$  زائد

القطع الناقص:

$c = 3$

مجموع طولي محوريه  $[2a + 2b = 18] \div 2$

$a + b = 9 \Rightarrow a = 9 - b$  ..... (1)

$a^2 = b^2 + c^2$

$(9 - b)^2 = b^2 + (3)^2$

$81 - 18b + b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 18b = 81 - 9$

$[18b = 72] \div 18 \Rightarrow b = 4$

$a = 9 - b$

$a = 9 - 4 \Rightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$



$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{3} - 1 \quad \text{عندما } x=1$$

$$y^2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \quad \text{بُهِلَ } \notin \mathbb{R} \quad \text{عندما } x=2$$

$$y^2 = \frac{2^2}{3} - 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \quad \text{بالجذر}$$

توحيد مقامات

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_1 \left( 2, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad P_2 \left( 2, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

إستراحة شعرية:

وهواك في قلب الظنون حقيقة

لا ريب فيه وحب غيرك باطل

إن كان حبك في الفؤاد فريضة

فسواك في شرع الغرام نوافل

### سؤال 19

عَيِّن النقاط على القطع الزائد الذي معادلته  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$  والتي تبعد من البؤرة في الفرع الأيمن بمقدار  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  وحدة.

2005 - د (2)

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a^2 = 3, b^2 = 1, c = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3 + 1$$

$$c^2 = 4$$

$$c = 2$$

$$F_1(x_1, y_1) \quad F_1(2, 0)$$

$$P(x, y) \quad P(x_2, y_2)$$

$$PF_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} \quad \text{بالتربيع}$$

$$\frac{1}{3} = (x-2)^2 + y^2 \quad \text{مربع حدانية}$$

$$\left[ \frac{1}{3} = x^2 - 4x + 4 + y^2 \right] \cdot 3$$

$$1 = 3x^2 - 12x + 12 + 3y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 11 = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

نتخلص من  $y^2$  ونجدها من معادلة القطع

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{3} - 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$3x^2 + 3\left(\frac{x^2}{3} - 1\right) - 12x + 11 = 0$$

$$3x^2 + x^2 - 3 - 12x + 11 = 0$$

$$[4x^2 - 12x + 8 = 0] \div 4$$



$$x^2 = \frac{4}{5}y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow \left[ 4P = \frac{4}{5} \right] \div 4$$

$$P = \frac{1}{5} \Rightarrow P = \frac{1}{5}$$

القطع الزائد:

$$P = c \Rightarrow c = \frac{1}{5}$$

$$[5y^2 - 4x^2 = h] \div h$$

$$\frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{5}, b^2 = \frac{h}{4}, c = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}$$

توحيد مقامات

$$\frac{1}{25} = \frac{4h + 5h}{20} \Rightarrow \frac{1}{25} = \frac{9h}{20}$$

$$h = \frac{4}{45}$$

سؤال 20 لتكن  $x^2 - ky^2 = 3$  تمثيل معادلة قطع زائد احدي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $y^2 + 8x = 0$  جد قيمه  $k$ .

2007 - د (1)

القطع المكافئ:

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = -4Px \Rightarrow [4P = 8] \div 4$$

$$P = 2$$

القطع الزائد:

$$c = P$$

زائد

مكافئ

$$c = 2$$

$$[x^2 - ky^2 = 3] \div 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{\frac{3}{k}} = 1$$

$$a^2 = 3, b^2 = \frac{3}{k}, c = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(2)^2 = 3 + \frac{3}{k}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{k} \Rightarrow 4 - 3 = \frac{3}{k} \Rightarrow 1 = \frac{3}{k}$$

$$k = 3$$

سؤال 21 لتكن  $5y^2 - 4x^2 = h$  معادلة قطع زائد واحد بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ  $4y - 5x^2 = 0$  جد قيمه  $h$ .

$$4y - 5x^2 = 0$$

القطع المكافئ:

$$[5x^2 = 4y] \div 5$$

2003 - د (1)

$$x^2 = \frac{4}{5}y$$



WWW.iQ-RES.COM

الموقع التعليمي الاول على مستوى العراق



موقع طلاب العراق

” ( ... شارك رابط موقعنا ... )  
مع اصدقائك لتعم الفائدة  
ولا تنسونا من صالح دعائكم  
“

نتائج

كتب

ملازم

أخبار

أسئلة

التعليم العالي

وزارة التربية

تابعونا ..



@iQRES



/ iQRES



/ NTAAj.iQ

كل ما ينشر في موقعنا من محتوى هو مجاني ولخدمة الطالب العراقي



2019

Biochemistry



موقع طلاب العراق

# The Master Haider Waleed

07701780364

Part One



WWW.IQ-RES.COM



@iQRES



/iQRES

موقع طلاب العراق